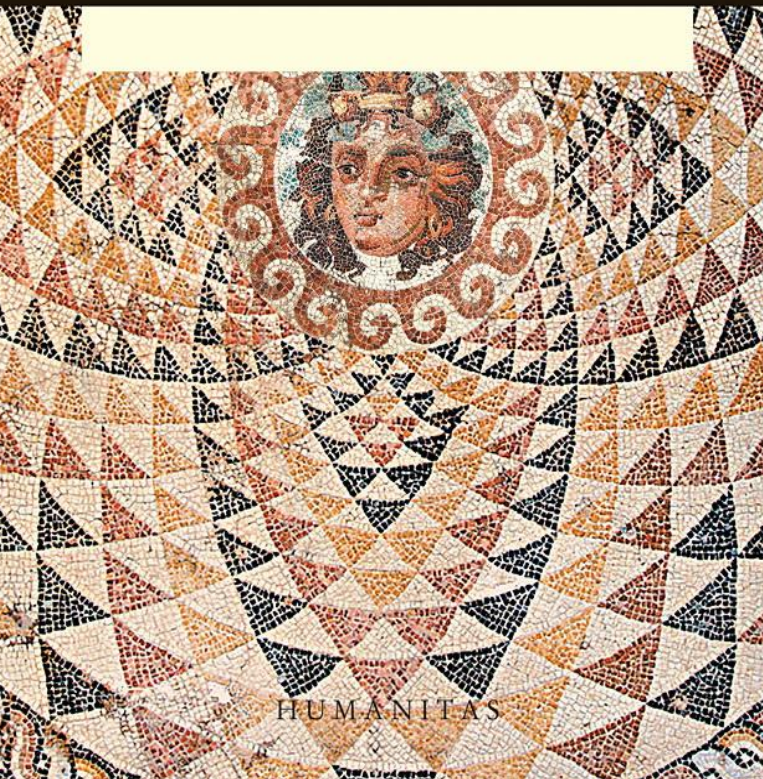
PAOLO ZELLINI

MATEMATICA ZEILOR ȘI ALGORITMII OAMENILOR



HUMANITAS

MATEMATICA ZEILOR
ŞI ALGORITMII OAMENILOR

Paolo Zellini e profesor de analiză numerică la Universitatea „Tor Vengata“ din Roma. Preocupat de raportul matematicii cu filozofia şi ştiinţele naturii, Zellini a mai publicat: *Scurtă istorie a infinitului* (1980), *Revolta numărului* (1997), *Gnomon. Un studiu asupra numărului* (1999), *Număr şi logos* (2010)

PAOLO ZELLINI

MATEMATICA ZEILOR ȘI ALGORITMII OAMENILOR

Traducere din italiană de
Liviu Ornea

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corector: Grigore Vida
DTP: Dragoș Dumitrescu, Dan Dulgheru

Tipărit la Art Group

Paolo Zellini
La matematica degli dèi e gli algoritmi degli nomini
Copyright © 2016 Adelphi Edizioni S.P.A. Milano

© HUMANITAS, 2018 pentru prezenta ediție românească

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Zellini, Paolo
Matematica zeilor și algoritmii oamenilor / Paolo Zellini;
trad.: Liviu Ornea. - București: Humanitas, 2018
ISBN 978-973-50-6248-4
I. Ornea, Liviu (trad.)
51

EDITURA HUMANITAS
Piața Presei Libere 1, 013701 București, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 021/311 23 30

Introducere

Despre ce realitate ne vorbeşte matematica? Opinia curentă e că matematicienii se ocupă de formalisme abstracte care doar din raţiuni de neexplicat se aplică în toate domeniile ştiinţei. Concepem entităţi imateriale care ulterior par destinate să definească modele ale unor fenomene care chiar au loc în lume. De o parte stau lucrurile reale, cele care „se întâmplă"; de cealaltă parte sunt conceptele matematice, creaţii ale minţii noastre, care ne stimulează comportamentul într-un mod mai mult sau mai puţin eficient. Cu siguranţă, faptul că nu cunoaştem adevăratele motive ale forţei descriptive a formulelor şi ecuaţiilor nu ne ajută să lămurim motivaţiile raţionamentului matematic. Aşa se vede, până la urmă, validată ideea că matematicienii nu sunt interesaţi să se ocupe de lumea reală, iar matematicile continuă să se prezinte ca o ştiinţă care elaborează operaţii ingenioase cu reguli şi concepte care par inventate cu unicul scop de a fi respectate întocmai[1]. Prea puţin contează că unele idei au fost sugerate de observarea fenomenelor naturale; operaţiile produc repede concepte avansate şi complexe care se detaşează de realitatea observabilă şi care, în final, confirmă imaginea strâmbă a unei matematici ca pur joc lingvistic ori ca formalism gol.

Totuşi, dacă ne întoarcem la istoria sa îndepărtată şi la motivaţiile ei cele mai profunde, matematica apare orientată diferit de cum e percepută în mod obişnuit. Izvoarele ne fac să înţelegem

că aritmetica şi geometria din vechime începuseră să-şi asume sarcina nu atât de a descrie sau de a simula lucruri reale, cât de a oferi o fundamentare a însăşi realităţii lumii din care şi ele făceau parte. Tocmai entităţile concrete, acelea cel mai direct şi nemijlocit perceptibile, erau schimbătoare şi apăreau deci ca ireale. În numere, în schimb, în raporturile şi în figurile geometriei era de găsit ceea ce le sustrăgea instabilităţii şi evanescenţei.

Dacă ne gândim la celebrele paradoxuri ale lui Zenon, la numerele-puncte ale pitagoreicilor şi ale atomiştilor antici, la filozofia matematică a lui Platon, la descoperirea incomensurabilităţii şi la semnificaţia conceptului de raport (*lógos*), la calculele babilonienilor şi la matematica vedică, ne aflăm în faţa unui corpus grandios de cunoştinţe care laolaltă aduc la lumină partea cea mai lăuntrică şi invizibilă, dar şi cea mai reală, a entităţilor existente în natură. Dar orientarea aceasta nu aparţine doar matematicii antice. Teoria numerelor şi a continuului aritmetic elaborată în secolul XIX se afirma ca o continuatoare ideală a vechii şcoli pitagoreice şi a viziunii sale despre lume inspirate de un principiu de realitate atomistă. Matematicienii din vremea aceea continuau să susţină că toate construcţiile lor simbolice corespund unor entităţi cât se poate de reale, iar senzaţia cea mai răspândită era că de succesul teoriilor lor depindea fundamentul necesar înţelegerii lumii. Atunci când bazele acelor teorii, în prima parte a veacului al XX-lea, au devenit nesigure şi au început să treacă printr-o revizuire critică, matematica a fost obligată să caute raţiunile care dau cu adevărat concreteţe unui sistem de calcul şi ne fac să avem încredere în el.

A început atunci să circule printre matematicieni un cuvânt cheie – *algoritm* – care denumea nu atât o formulă abstractă, cât un proces efectiv[2]. Procesul trebuia să se desfăşoare într-un număr finit de paşi, în spaţiu şi timp, pornind de la o mulţime de date iniţiale până la un rezultat final, potrivit modalităţilor prevăzute de o maşină. Definiţiile formale ale algoritmului, bazate pe recursivitate, pe maşina Turing ori pe alte formalisme, urcă în timp până în anii '30 ai secolului trecut, dar primele avertismente că tocmai

conceptul de algoritm era menit să moştenească sensul realităţii matematice, adică sensul a tot ce consideră matematicienii drept real şi efectiv, se înregistrează deja în primul deceniu al secolului trecut, la precursorii intuiţionismului matematic şi în primele argumente cu care Émile Borel înfrunta paradoxurile semantice şi primele semne ale crizei fundamentelor.

Ştiinţa algoritmilor a avut o dezvoltare tumultuoasă în întreg secolul XX. Punctul culminant s-a înregistrat în definiţiile formale din anii '30 după care, urmare a construcţiei primelor calculatoare digitale, s-a produs separarea în două filoane complementare şi relativ opuse: de o parte informatica teoretică, dimpreună cu o teorie abstractă a calculabilităţii şi a complexităţii calculului, de cealaltă parte o ştiinţă a calculului la scară mare, având sarcina să rezolve problemele fizicii matematice, ale economiei, ale ingineriei sau ale informaticii în termeni pur aritmetici şi numerici. Numeroasele implicaţii filozofice ale acestui al doilea filon nu au fost încă suficient lămurite, dar deja e evident, o simte oricine, cât de adânc a pătruns, în toate sectoarele vieţii, ale culturii şi în organizarea socială această multiplicare a unei varietăţi de procese de calcul menite să rezolve probleme specifice extrem de diverse.

În calculul numeric la scară mare, *eficacitatea* teoretică a algoritmilor tinde să devină *eficienţă* computaţională. Iar azi pare deja limpede că, pentru a fi *reale*, chiar entităţile matematice construite cu ajutorul unui proces de calcul trebuie să poată fi gândite în acelaşi mod, ca algoritmi eficienţi. Acum, eficienţa depinde mai ales de modul în care cresc complexitatea calculului şi eroarea care depinde în mod special de *cât de repede cresc* numerele pe parcursul calculului.

Motivele creşterii numerelor sunt strict matematice şi le putem înţelege numai folosind teorii relativ avansate. Dar e util să observăm că motivul creşterii, în orice aspect al său, a suscitat deja atenţia anticilor şi tocmai modul în care e tratată creşterea mărimilor în geometria greacă, în calculele vedice şi în matematica mesopotamiană ne ajută să înţelegem cauzele creşterii numerelor

în algoritmii moderni. Motivul e pe cât de simplu, pe atât de surprinzător: unele *scheme de calcul* importante au rămas neschimbate din acea vreme și până azi, când apar în cele mai complexe strategii pe care le utilizează calculul la scară mare.

Din ce anume provin acele scheme? În unele cazuri foarte relevante pentru știința modernă, izvoarele vorbesc limpede: acele scheme provin dintr-o combinație extrem de specială de proiect uman și principiu divin. În India vedică, altarele lui Agni aveau forme geometrice complexe și trebuiau să poată fi mărite de o sută de ori fără a-și schimba forma, cu tehnici specifice care se regăsesc și în geometria greacă, și în calculul mesopotamian. În Grecia, se putea întîmpla – de pildă, în cazul duplicării cubului – ca multiplicarea unei figuri să fie cerută de un zeu. Dar multiplicarea figurii geometrice era strâns legată de algoritmii cu care se aproximau acele numere iraționale care apar atunci când se măsoară mărimi geometrice precum diagonala unui pătrat de latură unu ori raportul dintre o circumferință și diametrul său. Cu mult înainte de zeul lui Descartes, cei care au asigurat legătura între concepțiile misticilor și natură, între sfera noastră cea mai intimă și realitatea externă au fost zeii vedici și cei greci. Și pe vremea aceea principiul unei asemenea legături posibile era matematica. În orice caz, modalitățile de creștere în geometria antică, sugerate de zeu, se reflectă azi în creșterea numerelor în calculele digitale, influențând în mod fundamental stabilitatea calculului și puterea de predicție a modelelor matematice. Într-adevăr, modalitățile de creștere a figurilor geometrice, în particular a pătratului, sunt adesea corelate cu proceduri *numerice* care generează fracții p/q care aproximează numere iraționale, unde p și q sunt numere întregi. Dar de obicei p și q cresc cu atât mai repede cu cât e mai rapidă convergența metodei, cu eventuale efecte negative asupra preciziei și a stabilității întregului proces de calcul.

Teza conform căreia numerele iraționale sunt entități reale, cu un statut ontologic de același fel cu al numerelor întregi, a fost o cucerire a matematicii sfârșitului de secol XIX și a modului în

care s-a definit atunci conceptul aritmetic de continuu. Dar dezvoltarea ştiinţei algoritmilor şi a calculului digital în secolul trecut a devenit expresia unei alte opoziţii: un fel de ultim act al acelei tensiuni perene dintre numere şi geometrie, dintre discret şi continuu către care trimiteau celebrele paradoxuri ale lui Zenon. Se poate vorbi despre opoziţie, deoarece studiul algoritmilor a fost înlesnit, din chiar primii ani ai secolului trecut, de un concurs de idei orientate înspre reevaluarea aspectelor mai realiste şi constructive ale matematicii, în antiteză cu acele abstracţiuni din care se născuseră paradoxurile şi criza fundamentelor: pe de o parte, autoritatea matematicianului francez Émile Borel, care semnala importanţa definirii obiectelor matematice prin construcţii algoritmice; pe de altă parte, sciziunea dramatică operată de L.E.J. Brouwer şi de intuiţionismul matematic în interiorul ansamblului matematicii. Susţinând că un număr există numai dacă e construit, Brouwer a dezlănţuit un atac general asupra sistemului ştiinţific predominant la acea dată, punând la îndoială înseşi definiţiile fundamentale ale analizei clasice.

Filozofiile constructiviste, care se bazează pe o idee de calculabilitate efectivă, au atribuit o nouă preeminenţă tocmai procesului care părea exterior vocaţiei abstracte a matematicii, anume au dat importanţă operaţiei concrete, acţiunii naturale şi, până la urmă, procesului computaţional care se desfăşoară în interiorul unei maşini în limitele convenite de spaţiu şi timp. Dar e la fel de evident că strategii computaţionale importante sunt modelate pe aceleaşi scheme pe care oamenii le-au elaborat în timpuri în care ei se găseau în strânsă legătură cu zeii. Din necesităţi rituale, în India vedică şi, la fel, în Grecia, motivul creşterii mărimilor avea o importanţă fundamentală şi trebuia atacat cu metode matematice. Iar schemele aproximative pentru a face să crească o mărime a unei forme geometrice încă pot fi decelate în formule ale matematicii computaţionale foarte avansate. Schemele nu s-au schimbat, dar au fost cu siguranţă amplificate şi perfecţionate cu ajutorul unor teorii matematice complexe. Tocmai din aceste teorii derivă

şi raţiunea eficienţei şi a capacităţii lor efective de a traduce modelele matematice ale naturii în informaţie digitală pură.

Procesul computaţional însuşi, articulat într-o miriadă de operaţiuni concrete automate, se poate desfăşura numai graţie structurilor matematice abstracte care se inserează mai mult sau mai puţin artificial în calcul. Abstractizarea matematică se combină în mod necesar şi sistematic cu materialitatea execuţiei automate a operaţiilor. Calculul e posibil graţie presupunerilor teoretice complexe şi a unor proprietăţi speciale ale numerelor, ale funcţiilor şi ale matricelor.

Rămâne aşadar deschisă întrebarea: sunt numerele nişte entităţi reale? Iar în caz afirmativ, sunt toate entităţi reale în acelaşi, identic mod? Cele două întrebări trebuie atacate împreună. Istoria ultimului secol şi o analiză a conceptelor de număr şi de algoritm ne lasă deja să întrezărim o primă concluzie: există specii diferite de numere, care nu au acelaşi statut ontologic, dar pentru care se poate argumenta o existenţă reală din raţiuni diferite şi din puncte de vedere diferite. Un criteriu decisiv pentru a stabili realitatea numerelor e modul în care cresc ele în procesele de calcul. Şi raţiunile prime ale acestui fenomen sunt de găsit în analiza creşterii mărimilor geometrice elaborată de gândirea antică, cu osebire în matematica greacă, vedică şi mesopotamiană.

1

Abstractizare, existență și realitate

De unde vine matematica și care-i sunt scopurile? De ce există triunghiuri, pătrate, cercuri și pentagoane? Ce fel de realitate ori de existență li se poate atribui numerelor? Așa cum uneori precizează până și cei mai intransigenți formaliști, matematica e cunoaștere adevărată, iar obiectul acestei cunoașteri, putem anticipa cu toată încrederea, nu e arbitrar, nu depinde de vreo fantezie capricioasă sau de alegerea schimbătoare a unor anumite axiome sau principii. În plus, se întâmplă adeseori să percepem acest obiect ca o realitate externă, independentă de mintea care-o elaborează.

Ni se pare de obicei că matematica e o știință abstractă tocmai pentru că ea abstrage, pentru a le studia, proprietățile comune ale unor entități particulare, precum numerele, relațiile, figurile, ca și cum proprietățile ar fi, la rândul lor, noi entități care ascultă de legi specifice. Ceea ce are avantajul că tot ce se afirmă despre acestea din urmă poate fi apoi aplicat diverselor entități particulare din care acestea proveniseră prin abstractizare. Atunci când e abstract, raționamentul devine mai general și mai puternic. Dar abstractizarea face mai problematică individualizarea unei *esențe* a entităților matematice, a unei naturi intrinsece pasibilă de a fi definită. Din existența lor, cel puțin ca obiecte ale gândirii noastre, nu pare să derive o realitate a esenței sub forma a ceva stabil și limpede recognoscibil. Nu pare evidentă tradiționala legătură reciprocă dintre *essentia* și *existentia*, care face ca una să nu aibă

realitate în absența celeilalte.[3] Esența numerelor constă cumva în natura lor specială pe care am putea-o intui direct, sau se extrage mai degrabă din proprietățile unui domeniu abstract pentru care numerele respective sunt doar un posibil exemplu – și nu în mod necesar unic?

De obicei, a doua idee e cea preferată. Proprietățile studiate separat se subsumează unui sistem de adevăruri extrase din axiome, iar matematica, disociată de orice intuiție directă, ar fi atunci o știință a unor relații pur formale, independentă de orice interpretare concretă a lor. Un corp de numere specific,[4] așa cum e corpul numerelor reale sau al numerelor complexe, satisface aceleași axiome de care ascultă și *alte* domenii de entități matematice. Se poate întâmpla ca un corp de numere să fie individualizat doar până la un izomorfism, deorece nu poate fi distins de alte entități matematice care se bucură de aceleași proprietăți. Chiar și numai datorită acestei împrejurări, matematica e complet indiferentă la eventuala căutare a naturii specifice a acelor numere.

Recunoașterea sau caracterizarea unui obiect matematic depind, de regulă, de specificarea sa cu ajutorul unor proprietăți independente de orice construcție sau reprezentare. Și e de obicei suficientă o singură, simplă definiție care se bazează pe puține proprietăți pentru a individualiza o întreagă clasă de domenii izomorfe.[5]

Sunt instrumentele logicii potrivite pentru a stabili dacă, și în ce condiții, o entitate matematică există cu adevărat într-o formă anume, într-o lume externă independentă de noi? În chestiunea aceasta există opinii contrastante; e, de exemplu, o relativă distanță între convingerile lui Gottlob Frege și ale lui Bertrand Russell, pentru a cita doar doi exponenți foarte importanți ai primului logicism, de la care s-a inspirat ideea de a demonstra că întreaga matematică se bazează pe logică. Pentru Frege, numerele erau obiecte logice care trebuie definite într-un mod oarecare, a le defini neînsemnând a le crea, ci a pune în evidență ceea ce există de drept.[6] Poziția lui Russell e diferită, cu siguranță mult mai favorabilă nominalismului, dar și cu trăsături oscilante. Pentru Russell, logica,

în întregul său, era un instrument indispensabil de cunoaştere a lumii *exterioare*. În *Cunoaşterea lumii exterioare* (1914), Russell scria că elementele fundamentale pentru a explica natura evenimentelor sunt lucrurile, calităţile şi *relaţiile*, pe care logica dinainte le ignorase, presupunând că toate afirmaţiile au forma subiect-predicat. Logica tradiţională nu considerase *realitatea* relaţiilor care, în schimb, erau indispensabile pentru a descrie lumea şi pentru a risipi erorile metafizicii tradiţionale. Pentru Russell, tocmai mistica şi metafizica tradiţionale erau cele care susţineau irealitatea lumii pe care o percepem noi. Logica, explica el, serveşte la articularea unei descrieri a lumii pornind de la propoziţii atomare care înregistrează fapte ale experienţei cu caracter empiric. De la propoziţiile atomare se trece la propoziţii mai complexe, folosind tot logica. Logica nu intră în mod evident în înregistrarea faptelor elementare, ci constituie o cunoaştere cuprinzătoare, *a priori*, pe care se bazează toate deducţiile posibile. Acest complex de deducţii, chiar dacă nu derivă doar din cunoaşterea senzorială, trebuie considerat a fi cunoaştere adevărată şi efectivă. Iar matematica, conchidea Russell, e o parte esenţială a ei.

Totuşi, dacă suntem atenţi la ce ne spune cu adevărat logica, uneori pare să prevaleze cel mai radical nominalism. Russell era nevoit chiar să admită că acele clase care definesc numerele nu sunt lucruri a căror existenţă trebuie să o stabilim. Desigur, limbajul logicii îşi asumă sarcina să declare existente un număr, o mulţime sau o funcţie. Dar *realitatea* numerelor nu coincide în nici un fel cu existenţa stabilită în acel limbaj. Propoziţiile logice care afirmă că o entitate matematică există servesc „nu pentru a reuşi să ştim ce este ceva, ci pentru a şti că o anume aserţiune sau o anume teză, a noastră sau a altcuiva, *spune* că ceva este; iar aceasta e la modul cel mai propriu o problemă lingvistică, nu o problemă ontologică".[7]

Logica nu e suficientă pentru a fundamenta o ontologie a obiectelor abstracte. Cu atât mai puţin ar trebui să uimească cuvintele cu care Goodman şi Quine reluau, în 1947, nominalismul radical

implicit în proiectul fundamentării matematicii pe logică: „Nu credem în obiecte abstracte. Nimeni nu presupune că entitățile abstracte – clase, relații, propoziții etc. – există în spațiul-timp; dar noi vrem să afirmăm mai mult. Noi ne descurcăm perfect renunțând complet la ele".[8]

Merită totuși precizat că adesea „obiectele abstracte" sunt susceptibile de a exista în forme diverse și de a se întrupa cu adevărat în entități relativ concrete care trăiesc în spațiu și în timp. Această împrejurare depinde de cel puțin două motive distincte și de natură diferită: existența unui calcul automat, care se desfășoară în spațiul și timpul fizice ale unei mașini, și convingerea difuză că entitățile matematice sunt ca niște organisme vii, în măsură să dicteze condițiile concrete care ne permit să le studiem și să le înțelegem. Posibilitatea de a opera, în anumite condiții, asupra numerelor care există fizic sub formă de șiruri binare în memoria unui calculator e prin ea însăși un dat decisiv. John von Neumann a putut observa cum calculul matematic la scară mare, care se dezvolta începând din anii '40, odată cu proiectarea primelor calculatoare digitale, era un calcul în *spațiu* și în *timp* făcut posibil de structuri abstracte pe care numai matematica pură era capabilă să le elaboreze. Abstracțiune matematică și realitate fizică trăiau nedespărțite în noua știință a calculului.

Când vorbim despre realitate, intrăm pe un teren extrem de accidentat și ambiguu, pe care lucrurile se răstoarnă ușor: real poate fi și un număr care nu există așa cum am vrea sau cum ne-am aștepta, dar pe care ne simțim cumva obligați să-l definim, potrivit cu necesitățile noastre sau ale algoritmului.[9] De altfel, însuși Quine, pentru a defini numerele reale, se referea la teorii precedente, cum sunt ale lui Dedekind și Weierstrass, care foloseau și ele o varietate de cunoștințe care urcă în timp *cel puțin* până la teoria proporțiilor din cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid. Iar această teorie era confirmată, la rândul ei, de cunoștințe de natură computațională cu mult mai vechi decât teoriile euclidiene. Ce apare ca decisiv pentru a judeca un conținut al realității e un concurs

de experienţe şi situaţii, teoretice şi aplicative, care se adâncesc adesea în cel mai îndepărtat trecut şi care fac aproape necesară o anume definiţie sau o anume teorie pe care o vor concepută într-un anume mod şi nu într-altul. Ernst Mach a scris pagini de mare interes despre modul în care se ajunge la descoperirile ştiinţifice: până la urmă, întotdeauna se reia ceea ce se ştia deja, într-o combinaţie neîntreruptă între necunoscut şi cunoscut, între analiză şi sinteză, între descoperire şi recunoaştere. Descoperirea şi invenţia sunt, de obicei, susţinute de o istorie trecută şi de un lanţ de idei care le-au prilejuit şi le-au făcut necesare.

Pentru a simplifica, s-ar putea începe prin a presupune că realist e acela care susţine că enunţurile unei teorii ştiinţifice sunt ori adevărate, ori false, şi că ceea ce le face astfel e ceva exterior nouă, ceva diferit de datele senzoriale, de limbajul nostru şi de gândirea noastră.[10] N-ar putea fi plauzibilă atunci ideea de a face să depindă realitatea numărului de aceea a lumii fizice? Nenumăratele aplicaţii ale matematicii în fizică, economie, inginerie, chimie şi informatică formează un corp de cunoştinţe de o amplitudine şi eficienţă impresionante, care pare să poată fundamenta realitatea formulelor pe o filozofie naturalistă de un anumit tip, bazată pe ideea că universul constă exclusiv din obiecte naturale, obiecte plasate în spaţiu-timp şi supuse unor legi cauzale. Universul e o carte imensă – scrisese Galileo într-un pasaj celebru din *Il Saggiatore* –, scrisă în limbaj matematic şi e imposibil s-o înţelegi fără a te folosi de triunghiuri, cercuri şi figuri geometrice de alte feluri. Dar e îndoielnic că numai această împrejurare imprimă un caracter de realitate entităţilor matematice; putem doar afirma că nu e posibil să fim realişti cu privire la teoria fizică şi totodată nominalişti cu privire la teoria matematică.[11]

Nu e aşadar sigur că un realism filozofic cu privire la fizică ar fi unicul mod de a fundamenta o realitate matematică. Oricât e mintea noastră de capabilă să elaboreze calcule, e pe deplin recunoscut că, făcând abstracţie de aplicaţiile lor la lumea reală, ne aflăm în faţa unor algoritmi, formule şi demonstraţii cu contururi

mai mult sau mai puțin variabile, dar în măsură să ne dicteze, în ciuda noastră, condițiile și modalitățile lor de existență, ca niște creaturi rezistente și încăpățânate. De aceea declară matematicienii atât de adesea că se simt obligați să recunoască anumite entități și nu altele, că sunt uimiți de adevăruri care par să vină dintr-o altă lume, sau cel puțin dintr-o realitate exterioară față de capacitatea noastră perceptivă, față de limbajul nostru sau față de structura noastră mentală.[12] Împrejurare care ne conduce prin ea însăși să reconsiderăm teza lui Kant despre caracterul *a priori* al gândirii matematice, conform căreia „rațiunea distinge numai ceea ce ea însăși produce conform scopului său" (*Critica rațiunii pure*, Prefața la a doua ediție, 1787). Entitățile matematice, așa cum le concep atâția oameni de știință și cum le percepea, în particular, Charles Hermite, nu sunt compoziții artificiale moarte, ci ființe vii și reale, cu o coerență a lor și o intenționalitate în măsură să orienteze cercetarea noastră și să impună condiții acelei libertăți și autonomiei pe care îndeobște le atribuim scopurilor rațiunii noastre.

„Să definești *realul*. Asta e cel mai important", nota Simone Weil. Iar prima sa concluzie era: „Realul e transcendent; aceasta e ideea esențială a lui Platon".[13] E atunci nevoie, din cel puțin două motive, să pornim de la matematica antică: încă de la filozofia pitagoreică, dar și din calculele vedice și mesopotamiene, se desprinde problema realității entităților matematice, iar calculul modern, începând cu secolul XVI și până astăzi, se bazează pe construcții elaborate de știința antică. În Grecia, problema realității numerelor era pusă măcar implicit, deoarece era vorba de a înțelege relația pe care o întreține entitățile matematice cu infinitul, cu non-ființa lui *ápeiron*. Infinitul era absență (*stéresis*), potențialitate pură, și orice lucru, pentru a exista și pentru a dura, trebuia să se opună negativității nelimitatului. În matematica greacă asta era sarcina *lógos*-ului, a raportului în care se găsesc prodromurile numărului modern. Raportul, și ceea ce implica el, era, nu doar în Grecia, o entitate apropiată de zei. Dar atunci, tocmai în raport trebuia căutată realitatea numărului: nu întâmplător, tocmai grație

regândirii conceptelor de raport și de proporție (care se găsesc la Euclid și în știința computațională preeuclidiană), au fondat matematicienii secolului XIX ontologia numărului și a continuului aritmetic. Exact această împrejurare a pus în valoare logica cuantificatorilor cu care se afirma că *există* (cuantificator existențial) o anume clasă, sau că anumite condiții care permit individualizarea unui număr trebuie să fie satisfăcute de *oricare* (cuantificator universal) valoare a unor anumite variabile. Ceea ce i-a permis lui Bertrand Russell să afirme că „simțul realității e vital în logică".[14] Nu a fost însă de ajuns ca să fundamenteze cu adevărat o ontologie, iar ce s-a făcut mai departe pentru a remedia o atare insuficiență e o continuare ideală a proceselor computaționale cunoscute deja din epoci îndepărtate, nu doar în Grecia, dar și în China, India și Mesopotamia.

Procesele de numărare folosite încă din cele mai vechi epoci aveau adesea funcția de a conferi realitate unor lucruri, oameni și zei, prin intermediul unui gest demonstrativ sau deictic, introducându-le pe scena lumii pentru le actualiza și a le face recognoscibile, cu drept deplin de existență în timp și spațiu. Numărători, recensăminte, liste și cataloage apar frecvent la Homer și la Hesiod, la Eschil și la Herodot, ca și în Vechiul Testament. Enumerarea era o prerogativă a *lógos*-ului, care trimitea la o operație de selecție și punere laolaltă, de agregare ordonată a diverselor entități într-o unică mulțime. În tradiția pitagoreică, numerele însele erau dislocate ca mulțimi de puncte din spațiu, cu o ordine asemănătoare celei a armatelor ori a astrelor de pe firmament. Așadar numerele cu care se număra nu erau doar abstracte, dar și reale și realizabile. Totuși, odată cu demonstrarea faptului că există mărimi incomensurabile, se descoperise că numărul natural, *arithmós*, nu e suficient pentru a conferi existență efectivă acelor entități pe care noi, azi, le numim numere iraționale. Există între unele mărimi rapoarte care nu sunt exprimabile ca rapoarte între numere întregi; există entități fantomatice, așa cum avea să demonstreze cu *procedeul diagonal* Georg Cantor în secolul XIX, care scapă

oricărei enumerări. În matematica greacă, s-a încercat reprezentarea indirectă a acestor entități, folosind șiruri de numere, de rapoarte și de figuri geometrice supuse unei reguli de creștere sau descreștere. Matematica modernă se va folosi de șiruri analoage pentru a defini numerele raționale.

2
Matematica zeilor

E greu de spus de ce și de unde a apărut matematica și poate că e chiar inutil, cel puțin dacă urmărim argumentele celor care, pentru a descuraja asemenea întreprinderi, au încercat să-i demonstreze lipsa de sens intrinsecă. În *Omenesc, prea omenesc* (§ 249), Nietzsche denunța apăsarea, profundul plictis care pot fi consecința unei priviri îndreptate sistematic înspre trecut. În *A doua Considerație inactuală*, „Despre foloasele și daunele istoriei pentru viață", sufletul omului anticar, acela care îngrijește și arhivează în modul cel mai corect trecutul, poate cădea victima unei furii colecționiste oarbe și a unei curiozități opresive care devine un obstacol în calea oricărei alegeri hotărâte a noului și a vitalității. După Nietzsche, Michel Foucault a explicat că originile cunoașterii de orice fel sunt atât de multe, încât nu are sens să i se caute una anume, care să-i fi fost unicul izvor.

Se pare că nici matematica nu poate scăpa acestei reguli: oricum, există multe matematici; aritmetica, fizica matematică, algebra, geometria, analiza și statistica răspund unor întrebări diferite, ascultă de criterii și tehnici de demonstrație diferite, chiar dacă în multe cazuri studiul structurilor abstracte a dezvăluit afinități surprinzătoare între domenii disparate, lăsând să se întrevadă liniile unei cunoașteri unitare. De-a lungul timpului, teoriile matematice și-au schimbat adesea înfățișarea, au fost gândite și formulate în multe feluri și cu varii scopuri, ramificându-se în alte

teorii. Matematica s-a născut şi a renăscut de nenumărate ori, încât ne-am putea gândi la o ideea de tradiţie precum aceea a apologiei din Talmud despre Moise şi Rabi Akiva.[15] Moise, povesteşte fragmentul, primeşte de la Domnul lumii Tora scrisă cu litere împodobite cu bucle şi coroane infinite. Pentru fiecare buclă, îi prezice Domnul, Akiva avea să formuleze, la vremea lui, nenumărate doctrine. Moise cere să le cunoască, iar Domnul îi îngăduie, printr-o vrajă, să se aşeze în rândul al optulea, alături de elevii lui Akiva, în sala în care îi învăţa rabi. Nedumerit, Moise nu pricepe nimic din ce explica Akiva. Dar se linişteşte când elevii îl întreabă pe rabi cum a ajuns el să se ocupe de o anume problemă şi acesta răspunde că e o doctrină încredinţată lui Moise pe muntele Sinai. Aici stă sensul întreg al tradiţiei, în reluarea continuă a unor învăţături antice în formulări mai avansate şi susceptibile de a deveni învăţătură nouă. Matematica nu face excepţie.

Se pot totuşi evidenţia anumite teme originare care explică de ce şi cum s-a profilat în timp matematica aşa cum o cunoaştem, şi nu altfel. În ultimii ani ai secolului XIX părea în sfârşit clar de la care presupuneri trebuie început. Matematica, spunea teoria, se naşte dintr-o activitate liberă a intelectului, a unui *esprit* care calculează fără a se lăsa condiţionat de circumstanţe exterioare, cu operaţiuni ansambliste simple. Actul intelectual cel mai simplu, fundamental şi aparent imun la contradicţii, a devenit acela de a grupa diverse entităţi (numere, funcţii, matrice) într-o unică clasă şi de a încerca să operăm între aceste entităţi, de preferinţă fără a părăsi clasa. Se încerca să se demonstreze că *închiderea*[16] clasei în care se opera e o proprietate asiguratoare deoarece împiedică întâlnirea, în cursul unui calcul, cu o entitate străină care s-ar sustrage regulilor de calcul stabilite pentru acea clasă. E nevoie uneori să se iasă dintr-o anumită clasă, aşa cum e în cazul soluţiilor unei ecuaţii algebrice, care pot fi numere reale sau complexe, şi deci forţează ieşirea din corpul numerelor reale. Cum se ştie, extinderea la numerele complexe s-a născut din căutarea soluţiei ecuaţiilor algebrice de gradul al treilea. După Girolamo Cardano, Rafael

Bombelli a fost artizanul ei principal. Dar corpul numerelor complexe e şi el închis faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire care generalizează, în interiorul acestui corp, operaţiile obişnuite cu numere raţionale sau reale.

Studiul domeniilor din ce în ce mai abstracte şi complexe nu a aruncat în criză convingerea, ajunsă la maturitate în secolul XIX, că totul se poate reduce la conceptul simplu de număr întreg, în timp ce numărul întreg, la rândul său, se poate baza pe conceptul încă şi mai simplu de mulţime. Marile construcţii ale lui Weierstrass, Peano, Cantor, Dedekind sau Veronese se inspirau, toate, din marele proiect al *aritmetizării* analizei, de a deriva întreg edificiul matematicii, măcar în liniile lui mari, din numărul întreg, din teoria mulţimilor şi din conceptul de limită.

Trebuie totuşi să facem diferenţa între *origine* şi *derivare*. Se trage într-adevăr matematica din operaţii ansamblistice cum sunt cele elaborate de ştiinţa secolului XIX? Dacă cercetăm izvoarele, răspunsul nu poate fi decât negativ.

În vechea matematică mesopotamiană găsim calcule asemănătoare unor proceduri moderne, adevăraţi algoritmi *ante litteram*. Geometria vedică a altarelor focului cuprinde studiul echivalenţei figurilor geometrice, precum încircularea pătratului*, scop în care are nevoie de proceduri numerice de mare acurateţe, de exemplu pentru aproximarea rădăcinii pătrate a lui 2. Pentru pitagoreici, numerele aveau formă geometrică, împrejurare care impunea prin ea însăşi analiza relaţiei dintre numere şi figuri care ar fi dus – putem conjectura – la descoperirea mărimilor incomensurabile. Găsim în Grecia o geometrie virtual legată de algebră şi de *computatio* care precede ştiinţa modernă a calculului. Recunoaştem scheme fundamentale şi în vechea matematică chineză. Una peste alta, se observă că în diverse tradiţii s-a stabilit de timpuriu o relaţie

* *Circolazione del quadrato*, în original. E traducerea italiană a expresiei folosite de James Joyce, *circling the square*, cu referire la scriitura romanului său, *Finnegans Wake*, şi se referă la desenul lui Leonardo da Vinci în care corpul uman apare încadrat într-un pătrat şi într-un cerc. (*N. t.*)

enigmatică între număr și figură, o tensiune problematică din care a derivat, în afară de studiul incomensurabilității, analiza conceptului de infinit și a structurii continuului, chiar a *lógos*-ului matematic, o știință a rapoartelor ca fundament al unui cosmos inteligibil. Tocmai din această tensiune problematică s-au desprins primele tentative de a da formă unor concepte importante, precum incomensurabilitatea, constructibilitatea efectivă ori aproximarea, concepte care au marcat întreaga matematică de după aceea.

Nu se poate nega că, încă de la primele sale apariții în civilizații îndepărtate, calculul își demonstrează afinitatea profundă cu practici și cunoștințe de natură diversă. Oricât de sărace ar fi izvoarele, suntem îndreptățiți să credem că matematica și filozofia, geometria și religia, calculul și metafizica descind dintr-o unică, măreață combinație reciprocă originară. Combinație care nu compromite nicicum specificitatea cunoașterii matematice, nu implică faptul că matematica ar servi la altceva sau că ar avea nevoie de justificări exterioare. Dimpotrivă, e adevărat contrariul: formulele algebrei și construcțiile geometriei se bucură de o specificitate indiscutabilă și de o evidență concluzivă, de o claritate, am spune, terminală, care nu au nevoie de alte explicații și justificări în afara celor de găsit în ele însele. Nici măcar logica nu e în măsură să ne ofere o explicație exhaustivă. Calculele apar aride și exterioare domeniului filozofic sau religios, dar e doar o aparență: religie și matematică, metafizică și calcul, acțiune rituală și gând exact par să se combine, la începuturi, într-un unic, impunător corpus. O combinație care se întrezărește în marile desene ale cosmologiei antice, în intuițiile primilor filozofi, ba chiar și în strategiile computaționale și în calculele cele mai delicate cu care erau familiarizați matematicienii greci, indieni, chinezi și babilonieni.

Izvoarele arată că primii care au pus întrebări matematice nu au fost oamenii, ci zeii, sau măcar oameni inspirați de zei. O dovedesc o varietate impresionantă de povestiri, explicații și

concordanțe. Prometeu al lui Eschil e inventatorul numărului și primul care a observat semnele astronomice care ritmează marile cicluri temporale, de unde necesitatea unei teorii matematice a proporțiilor. Prerogative analoage avea zeul egiptean Thot, *alter ego* al lui Prometeu și al lui Hermes, la fel Palamede, elev al centaurului Chiron și erou al războiului troian. Îl menționează Platon în *Phaidros* (261 b-d), îl numește „eleat" și îi atribuie aceleași capacități dialectice ca lui Zenon. Lui Gorgias i se datorează *Apărarea lui Palamede* (82 B 11a DK)*, care se înscrie într-o tradiție epică alternativă față de Homer, unde Odiseu apare într-o lumină prea puțin favorabilă. După Iamblichus (*Viața lui Pitagora*, 31), dintre făpturile vii și înzestrate cu rațiune, una e zeul, a doua e omul și a treia are natura lui Pitagora. Care Pitagora învățase de la egipteni și babilonieni o artă a măsurătorii transmisă de zei. Parmenide aflase de la Zeiță că ființa e una și perfectă. Viziunea sa metafizică, deloc străină de concepția matematică a lumii, s-ar putea alătura ideii de spațiu absolut pe care a schițat-o Newton în *Principia*. Platon afirma că matematica ne-a fost transmisă de Uranus, zeul cerului care exprimă în mișcarea astrelor legile numerelor și ale rapoartelor (*Epinomis*, 977 b).

Știm că zeii din tradiția vedică aveau o prerogativă: erau perfect transparenți și veridici. Asta era, după Charles Malamoud, și slăbiciunea lor, care le impunea extreme precauții și reticență în contactul cu oamenii. Transparența și veridicitatea implicau exactitatea; astfel, exacte și precise trebuiau să fie formele altarelor, la fel și scandarea acțiunilor și recitărilor rituale. Dar tocmai veridicitatea putea impune, pentru a se proteja, o contrafacere sistematică: numele zeilor erau stâlcite intenționat pentru a face inaccesibil numele cel mai secret și mai adevărat. În această stâlcire a numelui, afirmă *Śatapatha Brāhmaṇa*, constă propriu-zis mistica. Parcă am auzi celebrele cuvinte ale Muzei lui Hesiod (*Teogonia*, 27-28):

* E vorba despre numerotarea Diels-Kranz a fragmentelor presocraticilor. (*N. t.*)

„[...] minciuni aidoma cu adevărul / Ştim să rostim, dar când vrem ştim să vestim adevărul"*

Poate era şi acesta un motiv al puterii de atracţie a matematicii, o ştiinţă exactă care propune *enigme*, probleme alambicate care se rezolvă cu artificii bazate pe calcule, raţionamente, demonstraţii şi algoritmi. Paradoxurile lui Zenon despre imposibilitatea mişcării sunt printre cele mai celebre enigme. Dar caracterul abstrus şi enigmatic era în acord şi cu principiul pitagoreic potrivit căruia „Nici un fel de falsitate [*pseudos*] n-o îngăduie natura numărului"**, cum sună un fragment din Philolaus (44 B 11 DK). Cele mai simple figuri geometrice, ca dreapta, pătratul, triunghiul sau cercul, puneau în forma cea mai limpede şi accesibilă enigmele cele mai abstruse, precum natura incomensurabilităţii mărimilor ori existenţa mărimilor infinite şi infinitezimale. Pentru pitagoreici, definiţia figurilor avea caracter teologic, aminteşte Proclus (*Comentariu la Cartea I a „Elementelor" lui Euclid*, 130), şi nu e de mirare că fiecărei figuri i se asocia un zeu, obişnuinţă care s-a transmis prin secole, în reluări succesive, cel puţin până la Giordano Bruno.

În Grecia, rezolvarea unei probleme matematice se traducea printr-o ofrandă votivă către zei: stă mărturie o scrisoare a lui Eratostene adresată regelui Ptolemeu, transmisă nouă de Eutocius, comentatorul tardiv al lui Arhimede, din care aflăm că mecanismul său pentru construcţia mediilor proporţionale, care se folosea la duplicarea cubului, a devenit o ofrandă votivă păstrată în templul zeului. Aceasta era, în greacă, *anáthema*, cuvânt care se poate alătura lui *thésis*, care desemna acţiunea de a afirma sau de a stabili ceva, inclusiv în domeniul juridic. Or, teoremele matematice nu îşi propun altceva decât să demonstreze o *teză*; iar inventarea demonstraţiei riguroase e posibil să fi fost, potrivit unei intuiţii fulgurante a lui Simone Weil, rezultatul extremei atenţii

* Hesiod, *Opere*, trad. de Dumitru T. Burtea, Editura Univers, Bucureşti, 1973, p. 26. (*N. t.*)

** Toate citatele din presocratici sunt preluate din *Filosofia greacă până la Platon*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1979–1984. (*N. t.*)

îndreptate către imaginile gândite ca reflexe sau întrupări ale realităţii divine.

Ce ne-au lăsat moştenire zeii? Matematica le datorează doar o simplă colecţie de anecdote şi legende, sau moştenire de cunoaştere autentică? Răspunsul nu lasă nici o îndoială. De la problemele puse de zei provin articulaţiile unei gândiri fără de care matematica ar fi azi de neconceput.

Putem recunoaşte motivele acestei legături persistente între ordinea divină şi cea umană, între propunerile originare ale zeilor şi matematica modernă, nu atât în liniile generale, în scopurile explicite sau în vreun program comun de abstractizare a lumii vizibile. Legătura e mai subtilă, dar cu atât mai puternică, întrucât implică operaţii mai tehnice şi mai secrete ale calculului, schemele fundamentale pe care s-au fundamentat algebra şi analiza până în zilele noastre. Legătura decisivă priveşte două teme principale: modalităţile de creştere a figurilor geometrice şi echivalenţa figurilor de forme diferite.

Referinţele esenţiale se găsesc în tratatele vedice, anume *Śulvasūtra* (*śulva* înseamnă coardă – instrument, folosit împreună cu ţăruşii, la măsurători rituale), despre construcţia altarelor focului (Agni). Sunt documente care lămuresc originea şi semnificaţia metodelor pe care s-a edificat matematica greacă. Versiunile cele mai importante ale acestor tratate sunt cele ale şcolilor lui Baudhāyana, Āpastamba şi Kātyāyana şi răspund în primul rând exigenţei de a stabili echivalenţa altarelor de diverse forme. Căutarea echivalenţei duce la construcţia unui pătrat de aceeaşi arie cu un dreptunghi, sau a unui cerc de aceeaşi arie cu a unui pătrat. Din încircularea pătratului se trage, cel mai probabil, problema complementară, mai celebră, a cvadraturii cercului.

Cealaltă exigenţă e de a mări un altar menţinându-i neschimbată forma. Cel care conducea ritul trebuia să prevadă, cel puţin în principiu, construirea din 5 straturi de cărămizi a unor altare de mărime crescătoare, cu suprafeţele egale cu 7½, 8½, 9½, până la 101½ *puruṣa* pătraţi, unde *puruṣa* era unitatea de lungime liniară

egală aproximativ cu înălțimea unui om cu brațele ridicate. Aceasta impunea rezolvarea anumitor probleme de geometrie, cum ar fi mărirea unui pătrat sau găsirea unui pătrat egal cu suma sau diferența a două pătrate date, probleme a căror rezolvare cerea cunoașterea teoremei lui Pitagora: pătratul construit pe diagonala unui dreptunghi e suma pătratelor construite pe laturi.

Geometria vedică se bazează pe construcții geometrice care sunt descrise, în perioada următoare, în *Elementele* lui Euclid. Dar cele două prezentări nu răspund întotdeauna aceluiași scop: în *Elemente* găsim rigoarea demonstrațiilor, în *Śulvasūtra* prevalează ideea unei creșteri dinamice a figurilor geometrice și principiul invarianței formei la schimbarea dimensiunilor. Distanța dintre geometria vedică și cea greacă își găsește cea mai bună expresie în formula pătratului binomului, $(a+h)^2 = a^2+2ah+h^2$, egalitate algebrică de importanță centrală pentru dezvoltarea analizei moderne. În *Śulvasūtra* lui Āpastamba (III, 8)[17] apar unele formule pentru mărirea pătratelor de latură dată: o coardă de 1½ *puruṣa* conduce la un pătrat de arie 2¼ *puruṣa* pătrați, deoarece formula pătratului binomului devine $(1+½)^2 = 1+1+¼ = 2¼$. Cu alte cuvinte, dacă creștem cu ½ latura de lungime 1, aria pătratului crește cu 1¼. În mod analog, dacă la pătratul de latură 2 adăugăm fracția ½, obținem un pătrat de arie 6¼, pentru că $(2+½)^2 = 4+2+¼ = 6¼$. Imediat după aceea (III, 9) textul explică regula mai generală: creșterea $2ah+h^2$ care trebuie adăugată pătratului de latură a, când acesta primește creșterea h, e formată din două dreptunghiuri, $2ah$, și un pătrat, h^2, care împreună formează un gnomon[18], figura în formă de echer, care aplicată pătratului de latură a produce pătratul mai mare de arie $(a+h)^2$. Aici stă întreaga idee: George Thibaut, care a tradus și comentat, în secolul XIX, cele mai importante texte vedice despre construcția altarelor focului, o rezuma amintind că Āpastamba și Kātyāyana propuneau „exemple semnificative care ilustrau modul în care mărirea sau scăderea laturii provoca mărirea sau scăderea pătratului"[19] Dar în *Śulvasūtra*, găsim și *regula generală* a creșterii și a diminuării.

Nu se poate trece peste faptul că Euclid demonstrează o versiune pur geometrică a formulei binomului (*Elementele*, II, 4). Rigoarea demonstrației euclidiene lipsește în tratatele vedice, dar Euclid nu atrage atenția asupra *naturii incrementale* a formulei, care e chiar *incipit*-ul naturii incrementale nu numai a formulelor din analiză (începând cu secolul XVI), dar și a metodelor computaționale legate de ele. În schimb, natura aceasta incrementală e limpede și explicită în *Śulvasūtra.*

Aceasta și alte construcții geometrice, cum e cubul unui binom pentru mărirea unui cub geometric, au fost principalele instrumente pentru analiza ecuațiilor algebrice în perioada renascentistă și modernă. În secolul XVI, descoperirea numerelor complexe, datorată mai ales lui Rafael Bombelli, s-a desprins din studiul ecuațiilor de gradul al doilea și al treilea bazat pe regula creșterii (gnomonice) a unui pătrat sau cub. Rezolvarea ecuațiilor algebrice folosind gnomonul a fost problema prin excelență, cea mai importantă, atacată pentru prima oară în Occident de Theon din Alexandria în secolul IV, apoi, în veacurile care au urmat, de matematicieni arabi și italieni. Pe la sfârșitul secolului XVI, matematicianul francez François Viète a elaborat o metodă generală de rezolvare numerică a unei ecuații de grad arbitrar care constă într-un fel de prelungire algebrică a regulii incrementului unui pătrat sau cub. Newton a simplificat procedeul lui Viète și, la sfârșitul secolului XVII, Joseph Raphson a descoperit și el cum se poate exprima metoda lui Newton folosind o simplă formulă iterativă.[20] Tocmai în această formulare iterativă găsim azi schema esențială pentru a rezolva, cu mijloace automate de mare eficiență, sisteme generale de ecuații și probleme de minim pentru funcții.

Dar de regulile de creștere a unui pătrat geometric nu depind numai unele proceduri numerice. În aceleași reguli găsim formele de raționament de care a depins dezvoltarea analizei din secolul XVII, precum și, mai recent, studiul stabilității sistemelor de calcul. În linii generale, e extrem de important să știm cum se comportă o funcție sau un întreg proces de calcul la variații mici sau la creșteri ale variabilelor. Avem instabilitate ori de câte ori

variații, creșteri sau perturbări *mici* ale variabilelor produc o variație *mare* în valoarea funcției sau a rezultatului unui proces de calcul.

Pentru a defini principalele operații ale calculului diferențial, automatismul algebric care permitea manipularea noilor simboluri ale infinitului, Leibniz folosea formule ca aceea a pătratului binomului.[21] Cu doar câțiva ani înainte, de aceleași formule se folosise Bonaventura Cavalieri pentru a sa metodă a indivizibilelor.[22] Tot pe formule care generalizează expresia pătratului binomului se bazează și unele strategii fundamentale pentru discretizarea problemelor asupra continuului, pentru traducerea unor probleme diferențiale sau integrale, în care variabilele iau valori în continuul numeric, în probleme de natură aritmetică, rezolvabile cu operațiile obișnuite de sumă și produs. De aceste formule depinde în mare măsură relația dintre continuu și discret.

Nu e ușor de găsit în *Śulvasūtra* o semnificație religioasă precisă a formelor geometrice a altarelor lui Agni, nici nu e posibil să lămurim, pornind numai de la aceste texte, de ce gândirea matematică a ajuns să aibă în secolele următoare formele pe care le cunoaștem și nu altele. Ne putem totuși uita la o literatură mai vastă. Există aluzii precise și liste de figuri, de măsuri și de operații geometrice în texte atribuite de regulă unor mărturii și mai vechi decât *Śulvasūtra* și care includ exegeze ample cu caracter mitic, ritual și metafizic. *Taittirīya Saṃhitā* (5, 4, 11) conține o lungă listă de altare cu diferite structuri geometrice și unele pasaje din *Śatapatha Brāhmaṇa* vorbesc despre construcții de altare în formă de șoim, prefigurând un zbor simbolic. Formele geometrice sunt măsurate în *puruṣa*, iar în versiunea sa cea mai primitivă, corpul stilizat al altarului care semăna cu o pasăre e compus din șapte pătrate, dintre care patru formează corpul central, două aripile și unul coada. Ni se spune că *ṛși*, spiritele vitale, au creat șapte persoane diferite în formă de pătrat, iar acele șapte pătrate au format un singur corp, acel corp cu care a fost plămădit la început Prajāpati, creatorul întregului univers, al ființelor muritoare și a celor nemuritoare (*Śatapatha Brāhmaṇa*, VI, 1, 1, 1-3; X, 2, 3, 18).

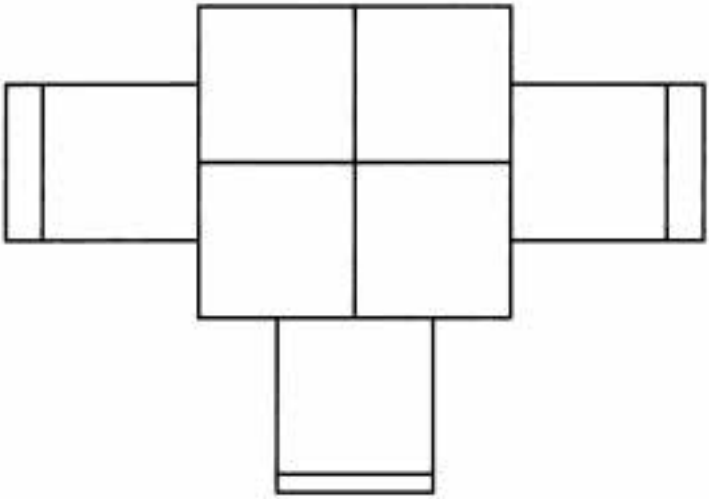


Figura 1

Care e scopul unui altar al focului? Se începe cu mitul lui Prajāpati, stăpânul și creatorul lumii, care, așa cum citim în *Śatapatha Brāhmaṇa* (VI, 1, 1, 12-13), rămâne rupt și dezarticulat în urma creației sale. Spiritul vital îl părăsește și zeii îl abandonează. Dar Prajāpati îl roagă pe Agni să-l reconstruiască, iar Agni e exact altarul care constă în corpul reconstruit al lui Prajāpati.

Śatapatha Brāhmaṇa (VI, 1, 2, 36) explică cum, luând forma păsărilor, spiritele vitale au devenit Prajāpati și că „luând acea formă [a altarului] Prajāpati a creat zeii“ Zeii au devenit și ei nemuritori. Un pasaj din *Bṛhadāraṇyaka Upaniṣad* (I, 4, 6) arată că Prajāpati a proiectat zeii, care îi sunt superiori, și că el, chiar dacă e muritor, a generat ceea ce e nemuritor.

Dar cum a fost posibil acest soi de hipercreație a ceva nemuritor zămislit de un muritor și cum ne putem imagina creatorul universului ca pe o ființă muritoare? Din textul *Upaniṣad* și din comentariul lui Śaṅkara se deduce că Prajāpati poate fi văzut din perspective diverse și capătă caracteristici aparent contradictorii.

El poate sta cu aceeaşi îndreptăţire fie în lăuntrul, fie în afara devenirii transmigratorii: „Chiar stând aşezat, el era departe; chiar zăcând, el se mişca pretutindeni" (Śaṅkara, *ad Bṛhadāraṇyaka Upaniṣad*, I, 4, 6). Scufundat în devenirea de el însuşi produsă, Prajāpati apare muritor, divizat, dezmembrat, pradă fricii şi singurătăţii şi deci, după cum spune *Bṛhadāraṇyaka Upaniṣad* (I, 4, 1), nevoit să înfrunte răul, să *ardă toate relele*. Acesta e motivul pentru care e numit Puruṣa; într-adevăr, comentează Śaṅkara, răul ataşamentului şi răul ignoranţei împiedică realizarea naturii divine proprii lui Prajāpati. Interpretând simbolic elementele care compun cuvântul, Śaṅkara precizează că Puruṣa îl indică pe acela care primul (*pūrvam*) a ars (*auṣat*) toate relele care-l împiedicau să-şi realizeze adevărata natură, iar ca urmare a reconstrucţiei lui Prajāpati şi a celebrării corecte a ritului, cel care face sacrificiul obţine identitatea perfectă cu Puruṣa (Śaṅkara, *ad Bṛhadāraṇyaka Upaniṣad*, I, 4, 1). Pentru construcţia altarului focului, se cere aplicarea normelor precise cu caracter matematic pe care le găsim în *Śulvasūtra*. Dar cărămizile care, stivuite aşa cum trebuie, realizează formele cerute, cerc, de exemplu, sau pătrat, sunt chiar ele ca nişte zei. Fiecare cărămidă e un zeu care trebuie invocat, spune *Kaṭha Upaniṣad* (I, 1, 15) şi Mṛtyu, Moartea, care cunoaşte perfect instrumentele pentru realizarea naturii divine şi pentru a se elibera de teama provocată de manifestarea sa în lumea devenirii, ne învaţă câte cărămizi să utilizăm, care să le fie numărul şi care să fie modalităţile de construcţie a altarului. La fel ca Prajāpati, şi Mṛtyu se plasează ori înăuntrul, ori în afara devenirii: în primul caz e moarte, foame şi frică, în al doilea e zeitate salvatoare care ne instruieşte în privinţa puterilor focului ca mijloc de purificare şi asceză.

Altarul uneşte interior şi exterior: Puruṣa e ascuns adânc în toate fiinţele, dar noi nu îl vedem, deoarece organele noastre senzoriale ne proiectează în afară şi ne fac incapabili de orice viziune interioară[23]. Edificat în formă geometrică, Agni e sinteza interiorităţii şi a exteriorităţii, a minţii şi a naturii, e soluţia matematică a

unei polarități pe care știința modernă o va experimenta, într-un mod dramatic, cu criza fundamentelor de la începutul secolului XX.

Un pasaj din *Śatapatha Brāhmaṇa* (VI, 1, 3, 20) explică mai bine natura altarului în raport cu o idee despre număr și despre formă geometrică supuse unui proces de creștere. Se precizează în el că altarul va fi înălțat în timp de *un* an și că unii preferă să spună, mai degrabă, *doi* ani. Edificarea și recitarea rituală trebuie să dureze un prim an în care altarul e ca o sămânță menită să germineze, „deoarece sămânța plantată e productivă; ea zace destinsă transformându-se și crescând". Dar creșterea altarului trebuie să respecte proporții matematice precise, împrejurare în acord perfect cu viziunea platoniciană a progresiilor numerice ca modalități de creștere a numărului conforme cu *phýsis*. În viziunea platoniciană, creșterea începea de la numărul 1, conceput ca principiu generator de progresii în care natura (*phýsis*) era ca întipărită.[24] Cu asemenea presupuneri au fost elaborate procedee importante de calcul, parte a unui patrimoniu cuprinzător de cunoștințe matematice în care încă putem întrezări instrumentele principale pentru reconstrucția și creșterea lui Prajāpati.

În fine, ne întrebăm: care prerogative făceau din matematică instrumentul cel mai potrivit pentru reconstrucția lui Prajāpati? Ne încumetăm să avansăm o ipoteză, amintind un pasaj din tratatul de aritmetică a lui Severinus Boethius. Tot ce există în natură, explica Boethius, își datorează forma legilor matematicii. Rapoartele în care se combină cele patru elemente, rotația ritmurilor temporale, revoluțiile cerești, totul se descrie cu numere. Altarul avea și o semnificație cosmologică. Dar numărul însuși, deși supus variației, pentru că există numere de naturi diferite, rămâne veșnic de o aceeași substanță, pentru că *nu e niciodată compus din entități diferite de el însuși*.[25] În număr găsim principiul imuabilității, predispoziția de a lua orice formă fără a ieși vreodată din sine. Exact aceasta era natura zeului care trebuia reconstruit.

3
Formule matematice și formule filozofice

Platon atribuia matematicii o funcție dianoetică, adică o poziție intermediară între *dóxa*, gândirea sau opinia corectă și totuși distinctă de știință, și *noûs*, inteligența supremă a principiilor (*Republica*, 511 d). De aici au derivat formule, expresii și moduri de a gândi care au marcat întreg parcursul metafizicii și chiar al matematicii. Printre termenii comuni se numărau *lógos* (discurs, dar și raport matematic) și *spermatikòs lógos*, rațiunea seminală a stoicilor, principiul cosmic de generare, dar și unitatea din care se extrăgeau, folosind algoritmi ingenioși, rapoartele numerice care aproximau un număr irațional. *Logistiké* indica un calcul aritmetic al rapoartelor, dar era și termenul care trimitea la o facultate deliberativă, asemănătoare calculului, întipărită în partea nepieritoare a sufletului. Expresiile filozofice „mai mult sau mai puțin" și „mare și mic" intervin frecvent în dialogurile lui Platon ca sinonim al nedefinitului (*ápeiron*), dar se potrivesc și pentru a semnifica modul de a aproxima numerele iraționale cu fracții: avansând în calcule, distanța dintre fracție și numărul irațional (nereprezentabil ca fracție) devine din ce în ce mai mică, în timp ce numărătorul și numitorul fracției devin din ce în ce mai mari. Pe la mijlocul secolului XV, Nicolaus Cusanus declara că adevărul nu primește nici mai multul, nici mai puținul. Cuvintele sale trebuie citite *in speculo mathematico*: adevărul stă într-o poziție centrală, ca acul unui cântar care oscilează infinit și permite apropierea

de punctul de echilibru printr-o dispunere din ce în ce mai precisă a greutăților, dar fără ca echilibrul perfect să se poată realiza.

Viața sufletului avea formă matematică. Așa cum pare legitim să deducem din *Etica nicomahică* a lui Aristotel, mai multul și mai puținul, excesele și lipsurile aproximărilor matematice pentru un număr irațional, erau contrapartida necontenitelor oscilații care marchează viața noastră morală, a exceselor și a lipsurilor care se dispun, precum Scila și Caribda, de o parte și de alta a acelei linii de mijloc care întrupează idealul de perfecțiune.

Lista formulelor filozofice împrumutate din matematică se poate încă amplifica: *antanaíresis* era metoda de căutare a divizorului a două mărimi (algoritmul euclidian); dar stoicii se foloseau de un termen similar pentru a denumi înțelepciunea vizionară. Același termen, *antanaíresis*, poate fi pus alături de germanul *aufheben*, acel *tollere* latin cu care Hegel unea două momente complementare ale dialecticii, suprimarea și păstrarea, și care s-ar mai putea reda prin „rezolvare", defacere înapoi, urcând către principii.[26] Și încă: *prós ti*, în Euclid (*Elementele*, V), exprimă ideea matematică de „relație", în timp ce pentru Toma din Aquino aceeași idee va deveni cheia pentru înțelegerea sensului conceptului teologic de creație. O presupoziție a doctrinei platoniciene consta în analogia dintre legi structurale, esențialmente identice sau concordante, operând în domenii fenomenale diferite.[27] Aceeași presupoziție era împărtășită, înaintea lui Platon, de orfici și pitagoreici.

Aceste legi par să depindă nu de liberul nostru arbitru, ci de un fel de necesitate intrinsecă entităților matematice înseși. Din acest motiv, formulele apar încărcate cu o forță ermetică: își trăiesc propria viață și se impun de la sine, chiar în contrast cu așteptările noastre, determinându-ne în mod categoric forma raționamentelor. Par să facă parte dintr-o *realitate exterioară* minții noastre; poate că acesta era motivul pentru care Platon nu-i primea în Academie pe cei care nu cunoșteau geometria.

Totuși, cu timpul, formula sapiențială însăși, a cărei veridicitate era întărită și justificată de afinitatea cu o formulă matematică, își

revendica propria autonomie, manifestând pretenția de a dicta, prin ea însăși, legile de neocolit ale gândirii. A apărut atunci o situație stânjenitoare care se poate întrezări în paginile oamenilor de știință moderni, cum e Galilei, pentru care necunoașterea matematicii făcea imposibilă orice interogare a naturii. Galilei știa prea bine că pitagoreicii și Platon admirau intelectul uman până la a-l considera „participant la divinitate" (*Dialog asupra celor două mari sisteme ale lumii*, I) datorită capacității sale de a înțelege semnificația numerelor: o poziție pe care el însuși o împărtășea. Dar era conștient și că misterele pentru care era atât de venerat Pitagora nu se puteau rezuma în formule comunicabile ori în vagi volute retorice. Dacă pitagoreicii afirmau că trei e numărul totului, pentru că orice lucru e determinat de un început, un mijloc și un sfârșit, nu se putea face din trei un număr perfect, mai mult decât s-ar fi putut face din doi sau din patru. Folosirea unei formule sapiențiale ca monedă curentă, ca principiu aplicabil în orice circumstanță, ar fi banalizat secretul numerelor transformând adevărul într-un simplu stereotip. Dimpotrivă, adevărul trebuia cercetat cu ajutorul raționamentului și al demonstrației matematice. Pentru a exprima într-o formulă sapiențială o structură aplicabilă în orice domeniu al cunoașterii, trebuia bine înțeles calculul, până la ultimele lui detalii, și trebuia să te poți adânci în studiul celor pe care Benedetto Croce îi numea, în batjocură, folosind cuvintele lui Giambattista Vico, „genii mărunte".[28]

Și totuși, dacă ne gândim bine, tipul de raționament care inaugura știința modernă continua să folosească intuițiile care sunt de găsit în formulele platoniciene și pitagoreice. Nici chiar Galilei nu excludea cu totul această posibilitate. Studiul căderii corpurilor, de care a depins dezvoltarea dinamicii, l-a obligat să utilizeze o schemă care apare încă de la originile matematicii și e intim legată de natura continuului: existența unui caz de egalitate cuprins între „mai mare" și „mai mic" (*Dialog asupra celor două mari sisteme ale lumii*, I).

Paradigme analoage de gândire, bazate pe un principiu de continuitate, par să se profileze deja în vechea aritmetică mesopotamiană,[29] şi s-ar putea ca ele să fi inspirat conceptul euclidian de raport şi proporţie (*Elementele*, V): raportul de mărimi comensurabile sau incomensurabile, ca entitate cuprinsă între o serie de rapoarte numerice mai mici şi o serie de rapoarte numerice mai mari. Metodele de rezolvare numerică a unei ecuaţii s-au bazat dintotdeauna pe scheme analoage şi, pentru a pune acest lucru în evidenţă, un algoritm cunoscut încă din îndepărtata Antichitate, aşa numita *regula falsi*, era numit de matematicienii arabi „regula talgerelor şi a balanţei".[30] Valoarea căutată a necunoscutei era acul balanţei şi în el se afla punctul de echilibru invizibil al unei oscilaţii indefinite de aproximări numerice prin exces şi prin lipsă.

Balanţa cu braţe inegale, principiul pârghiei conform căruia mărimi comensurabile se echilibrează la distanţe invers proporţionale cu greutăţile lor, a fost discutată de Arhimede, tot el folosindu-se de imaginea balanţei în raţionamente euristice care precedau demonstraţiile riguroase. În cazul cvadraturii parabolei, metoda euristică, de natură mecanică, consta în echilibrarea unor părţi ale figurii care completa un segment de parabolă P şi un triunghi înscris T (cu aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime) cu părţile unei alte figuri ale cărei măsuri erau cunoscute. La urmă, se demonstra că aria lui P e 4/3 din aria lui T.

Metoda exhaustiunii, folosită de Euclid şi de Arhimede, se baza pe excese şi lipsuri care aproximau o egalitate. Pentru a arăta că cercurile sunt unul faţă de altul la fel ca pătratele construite pe diametrele lor (*Elementele*, XII, 2), Euclid se referă la două şiruri de poligoane, respectiv înscrise în şi circumscrise unui cerc, ale căror arii o aproximează pe a cercului prin lipsă şi prin exces. Cercul stă în mijloc şi corespunde unei egalităţi ideale, totuşi imposibile, între poligonul înscris şi cel circumscris. Teza e demonstrată de posibilitatea apropierii indefinite de această egalitate ideală, făcând să crească numărul de laturi ale poligoanelor.

Sugestivitatea şi eficienţa imaginii balanţei ajungeau până la zeii din Olimp, pentru că Zeus folosea balanţa pentru a cântări sorţii războiului din Troia, iar Atena pentru a face dreptate în procesul lui Oreste, acţionând ca un centru decizional între opţiuni opuse.

Algoritmii moderni la scară mare folosiţi la rezolvarea unui sistem de ecuaţii ori pentru calculul minimului unei funcţii se bazează tot pe aceeaşi idee care îi inspirase pe matematicienii civilizaţiilor antice, ca în Mesopotamia (pe la 1800-1700 î.Cr.) sau în India vedică. O tăbliţă babiloniană (YBC 7289), analizată de Otto Neugebauer şi de Abraham Sachs, înfăţişează un pătrat cu diagonalele sale şi nişte numere care sugerează cunoaşterea, în Mesopotamia, a unor aproximări corecte, prin exces şi prin lipsă, a rădăcinii pătrate a lui 2. Cunoaştere moştenită apoi, presupunea Neuberger, de matematicienii indieni.

Principiul continuităţii, folosit de Galilei pentru a studia mişcarea corpurilor, care în secolul XVII a stat la baza revoluţiei moderne a metodei ştiinţifice, apare deja prefigurat în calculele mesopotamiene şi în matematica vedică. În lipsa cunoaşterii punctuale a acestor calcule, ştiinţa anticilor n-ar fi existat, cum nici ştiinţa modernă şi calculul din ultimul secol; şi poate n-ar fi existat nici metafizica, aceea care, pornind din pitagorismul antic, trecând prin platonism, s-a dezvoltat secole de-a rândul în Apus.

Raţiunea a tot ce am expus mai sus stă în operaţiile simple care i-au permis scribului să aproximeze numărul $\sqrt{2}$. Neugebauer şi Sachs sunt de părere că aceste operaţii ar fi dictate de ideea construirii unui şir indefinit de intervale mereu mai mici, unul inclus în celălalt şi cu capetele reprezentate de două numere raţionale, fiecare dintre ele conţinându-l pe $\sqrt{2}$. Astfel, începând cu calculele mesopotamiene din perioada antică, numărul $\sqrt{2}$ s-ar configura ca o entitate matematică definită de un şir de intervale care îl conţin. În Grecia ar fi fost concepute strategii analoage pentru aproximarea rapoartelor de mărimi incomensurabile via rapoarte între întregi, şi chiar definiţia numărului real, la finele secolului

XIX, s-ar trage tot din scheme de calcul asemănătoare celor mesopotamiene. Neugebauer pare perfect conştient de această trecere. În fine, se mai poate nota că algoritmul ipotetic care i-ar fi permis scribului să-l aproximeze pe $\sqrt{2}$ e cazul particular al metodei generale, puse la punct în secolele XVI şi XVII, de rezolvare numerică a unei ecuaţii algebrice de grad arbitrar. Metodă care nu serveşte doar pentru aproximarea unui număr iraţional, ci e un fel de *clavis universalis*, o strategie fundamentală a analizei şi a raţionamentului matematic din toate timpurile.[31]

4
Creştere şi micşorare. Număr şi *phýsis*

Geometria altarelor vedice avea să conducă, în perspectivă, la un studiu al relaţiei care se stabileşte între număr şi figură geometrică. Raportul *dreaptă-număr* era legat de mărimile incomensurabile şi de rezolvarea ecuaţiilor algebrice, în timp ce raportul *curbă-dreaptă* avea să ducă spre metodele de exhaustiune, spre calculul infinitezimal şi spre studiul numerelor transcendente precum e şi π.[32] În ambele cazuri, matematica a trebuit să înfrunte irealitatea infinitului, iar aceasta putea face ca orice contact al nostru cu lumea să devină fals şi lipsit de sens.

O altă împrejurare decisivă a fost următoarea: zeii au impus descrierea modului în care variază mărimile, cum cresc şi cum se micşorează. Creşterea şi micşorarea periclitau însăşi fiinţa, esenţa lucrurilor, acel *tò tí ên eînai*, conform formulei aristotelice (*Metafizica*, 983 a 27-28), *quod quid erat esse*: „faptul de a continua, din anumite motive, de a fi ceea ce era".[33] În mod evident, însuşi fundamentul metafizicii cerea implicit o explicaţie pentru felul cum o entitate oarecare, chiar supusă schimbării, putea să-şi conserve trăsăturile esenţiale. Entitatea trebuia să poată fi recunoscută şi tocmai această recunoaştere e presupoziţia de la care pleacă definiţia (*horismós*, *lógos*).

Chestiunea creşterii era răspândită în culturile antice şi avea implicaţii cosmologice care mergeau până la mişcarea Soarelui şi a Lunii. Pentru orfici, ne spune Proclus (*Comentariu la „Republica"*

lui Platon, II, 58, 10-11), „întregul ciclu al anului se împarte în creştere şi micşorare" Iar astrele, mai ales Luna, induceau o oscilaţie analoagă de creştere şi descreştere în viaţa terestră: Luna mişcă toate fiinţele sublunare şi, datorită puterilor ei, produce creştere şi micşorare în toate (*Comentariu la „Timaios" al lui Platon*, II, 87, 20-28, 12).

Creşterea se înscria în tema mai amplă a schimbării şi pierderii identităţii pe parcursul devenirii. Despre ea vorbea poetul şi dramaturgul sicilian Epicharmus (secolul V î.Cr.) într-una dintre primele mărturii ale doctrinei lui Pitagora. Iamblichos relatează că dramaturgul se abţinea să filozofeze deschis şi prefera să prezinte ideile lui Pitagora mascându-le sub forma jocurilor, a reprezentaţiilor teatrale (23 A 4 DK). Epicharmus a fost printre primii care a pus, în comedie, problema prezenţei în fenomenul creşterii a ceea ce grecii numeau *állo*, ceea ce e mereu altceva, diferit, similar materiei informe şi schimbătoare, curgătoare, instabilă şi ireală. Personajelor sale li se cerea, la fel ca, mai târziu, bătrânului Strepsiades din *Norii* lui Aristofan, să plătească o datorie contractată cu ani în urmă, dar ele negau că ar fi avut vreo datorie deoarece nu mai erau aceleaşi persoane dinainte: un argument sofistic, s-ar zice. Un fragment îl explică direct (23 B 2 DK):

> Aşadar, ia acum în considerare şi oamenii; unul se dezvoltă, altul piere treptat; toţi sunt tot timpul în perpetuă schimbare. Ceea ce se schimbă conform legilor naturii şi nu rămâne în aceeaşi stare poate deveni altceva faţă de ceea ce-a fost mai înainte vreme. Şi tu, şi eu fost-am ieri alţii şi acum am devenit alţii, şi iarăşi fi-vom alţii, şi nu unii şi aceiaşi, după cum e Logos-ul [firii].

Schimbarea există, dar are loc conform unei legi (*lógos*). Putem conjectura că această lege are o semnificaţie matematică şi că depinde exact de noţiunea de raport, prin mijlocirea căruia sunt puse în relaţie lucruri diferite, sau părţi diferite ale aceluiaşi lucru. O primă confirmare ne vine de la Aristotel care afirma (*Meteorologia*, 379 b-380 a) că „atâta vreme cât durează un anume raport (*lógos*)

natura (*phýsis*) unui lucru nu se schimbă". Către această durată sau invarianță în cursul unei schimbări s-au concentrat și matematica (începând cu Pitagora și cu *Śulvasūtra*) și, vreme de secole, filozofia platoniciană inspirată de ea.

Creșterea poate fi nelimitată, la fel și descreșterea. Dacă nu există margine, cu creșterea se merge în direcția infinitului mare, cu descreșterea în direcția infinitului mic și, în ambele cazuri, ajunge să prevaleze neființa lui *ápeiron*, entitatea se sustrage capacității noastre de o gândi, devine indefinibilă. Dar nu doar infinitul decretează acest fel de anihilare. În vremuri mai apropiate de noi, s-a dovedit că o entitate matematică resimte indefinirea chiar și în cursul unui proces de calcul finit, ca urmare a unei creșteri anormale și incontrolabile a numerelor.

În Grecia, un concept nodal pentru tot ce privea creșterea mărimilor era acela de natură, *phýsis* în greacă. Dar ar fi înșelător să traducem *phýsis* prin „natură", fără a mai adăuga nimic. În *Metafizica*, 1014 b 16-1015 a 19, și în *Fizica*, 193 a 28-193 b 21, Aristotel spune mult mai mult, trece în revistă diverse semnificații și precizează că natura trebuie legată în primul rând de ideile de creștere și generare. Natura, afirmă Aristotel, e „lucrul prim, încorporat, pornind de la ceea ce crește" (*Metafizica*, 1014 b 17-18); și chiar „cauza și principiul mișcării și repausului pentru lucrul în care se află mai întâi în sine și nu prin accident" (*Fizica*, 192 b 20).*

Conceptul aristotelician de natură pare să se miște pe două culoare distincte, unul care se referă la teorii materialiste precedente, altul conform unei idei de mișcare guvernate de formă (*morphé*) și de *lógos*. În privința primului, unii filozofi, amintește Aristotel, susțin că natura și realitatea (*ousía*)[34] produselor ei rezidă în materialitatea lor (*Fizica*, 193 a 10-12). Cuvântul de care se folosește Aristotel pentru a denumi această materialitate e *prôton arrýthmiston*, primul element constitutiv, lipsit încă de formă, al

* Aici și mai departe, pentru *Metafizica* am folosit traducerea lui Andrei Cornea (Editura Humanitas, București, 2001); pentru *Fizica*, traducerea lui N.I. Barbu (Editura Științifică, București, 1966) (*N. t.*).

unui lucru, cum ar fi lemnul unei lectici sau bronzul unei statui. *Arrýthmiston*, rău proporţionat, fără ritm, e negaţia lui *rythmós*, termen care uneşte cele două noţiuni de mişcare şi de formă şi care, înainte de a avea semnificaţia de „ritm", putea semnifica, la modul cel mai general, forma luată de ceea ce e mobil, fluid şi se poate schimba (Chantraine, Benveniste).

Aristotel înţelege deci semnificaţia lui *phýsis* ca fond din care provin lucrurile, un fond încă lipsit de formă şi incapabil, prin el însuşi, să suporte vreo schimbare care să-l scoată din propria virtualitate ori potenţialitate (*dýnamis*). Natura poate fi înţeleasă, explică el, în sensul lui *hýle*, *silva* latină care va deveni materia opusă formei. Dar Aristotel are un punct de vedere opus, conform căruia putem concepe o idee de natură bazată pe formă (*morphé*) şi pe aspectul sub care se înfăţişează potrivit *lógos*-ului (*tò eîdos tò katà tòn lógon*).

Înfruntarea celor două concepţii e un punct esenţial în istoria ideilor despre natură. Heidegger s-a referit la el, comentând că viziunea unei naturi ca *hýle*, ca materie, avea efectul de a lipsi mişcarea de orice caracter de invarianţă şi permanenţă. Dacă materia lucrurilor e apa, focul ori pământul, dacă elementele constitutive sunt doar atomii, atunci fluxul şi mişcarea lui *phýsis* sunt asemenea fugacităţii şi inconsistenţei. Potrivit acestei viziuni, „tot ce este dotat cu mişcare, orice schimbare şi orice stare supusă modificării (*rytmós*) cade în acel ceva care se adaugă fiinţării doar în chip accidental; mişcarea este nepersistentul şi, prin aceasta, ceea ce este lipsit de fiinţă".[35]

Atunci ce era, dimpotrivă, natura ca mişcare şi creştere în formă, ca *rytmós*, ca figură ori aparenţă conformă cu *lógos*? Acelaşi Heidegger aminteşte că, în limbajul matematicienilor, *lógos* înseamnă ceva ca relaţie sau raport, că *lógos* e substantivul lui *légein* care înseamnă în primul rând a pune laolaltă făcând o alegere şi deci, putem adăuga, a selecta anumite operaţii disparate pentru a

* Trad. de Thomas Kleininger şi Gabriel Liiceanu în Martin Heidegger, *Repere pe drumul gândirii*, Editura Politică, Bucureşti, 1988. (*N. t.*)

face din ele una singură, a pronunța și a uni cu numerele, a folosi numărul pentru a aduce „a aduce laolaltă într-unul singur mai multe lucruri risipite".[36] Cum procedează matematica cu numerele și cu rapoartele? Raportul unește două mărimi disparate, face oarecum din ele una singură, care constă în procedeul prin care se caută o măsură comună pentru amândouă. În mod similar, o ecuație pune laolaltă diverse mărimi într-o aceeași formulă; conceptul matematic de mulțime are ca scop punerea laolaltă a unor lucruri diferite într-o singură colecție; mecanismul recursiei reunește diferite operații, de exemplu toate posibilele sume dintre numere, într-un concept unic de operație, *suma*.

Astfel, discursul aristotelic trimite indirect la metamorfoză, la problema schimbării identității în cursul transformării și la posibilitatea de a se sustrage accidentalității devenirii cu ajutorul configurațiilor relativ stabile, printre care prevalează *lógos* și *morphé*. Orice lucru devine imagine rătăcitoare, spune Pitagora lui Ovidiu (*Metamorfoze*, XV, 178): „*cuncta fluunt omnisque vagans formatur imago*". Dar dacă ne referim la numere și la figuri geometrice, atunci devine clar cum e posibil ca schimbarea să fie reglementată de un raport și cum poate fi crescută o mărime fără a-i altera forma. Posibilitatea recunoașterii în procesele de creștere există numai când forma e stabilă: ceea ce era la început continuă să fie acum. Încă și mai semnificativă devine astfel teza aristotelică conform căreia permanența unui raport (*lógos*) garantează invarianța naturii (*phýsis*) unui lucru.

Un pasaj din Platon ne dezvăluie în ce măsură stabilitatea formei trebuie considerată o prerogativă divină (*Republica*, 380 d)*:

> Care va fi al doilea canon (*nómos*)? Oare socotești că zeul este un vrăjitor si că el, cu gând mârșav, apare mereu sub alte înfățișări, anume, când el însuși se transformă, schimbându-și chipul (*eîdos*) cu multe altele, când ne înșală doar, lăsându-ne să credem că el s-ar preschimba? Ori, nu

* Aici și mai departe, pentru *Republica* am folosit traducerea lui Andrei Cornea (Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986). (*N. t.*)

cumva crezi mai degrabă că el este sincer şi simplu şi că, mai puţin ca oricine, el îşi părăseşte înfăţişarea?

Acel „schimbându-şi chipul cu multe altele (*allátttonta tò autoû eîdos eis pollàs morphás*)" constituie drama metamorfozei şi se proiectează ca antiteză inconstantă şi schimbătoare a chipului divin. Dimpotrivă, zeul apare ca o fiinţă recognoscibilă şi *reală*, ca în epifaniile lui Artemis pe piscurile munţilor despre care vorbeşte Homer în *Odiseea* (VI, 102-109).[37] Atunci *eîdos*-ul, viziunea aşteptată, departe de a fi asemenea ideii evazive şi spectrale a empiriştilor moderni, nu e înşelătorie sau vrăjitorie, ci o experienţă exactă şi veridică, motiv pentru care nu poate dispărea într-un flux de imagini incoerente şi discordante. Totul creşte, se micşorează şi se transformă în curentul lui *phýsis*, dar zeul îşi arată chipul neschimbat. Poate acesta e motivul pentru care se căutau relaţii de echivalenţă între diversele figuri geometrice, iar altarul zeului, al lui Apolo în Grecia, sau al lui Agni în India, trebuia să poată fi mărit menţinându-i-se nealterată forma. Matematica se însărcina să facă posibilă această invarianţă necesară recognoscibilităţii figurii divine. Proteu, marele Bătrân al mării, supus unor continue metamorfoze, nu e o excepţie de la regulă pentru că, prin contrast, el trimite la un principiu de veridicitate: el apare din loc în loc din pluralitatea indistinctă a talazurilor mării, un corelativ al capacităţii sale de transformare, cu aceeaşi intensitate şi instabilitate cu care se poate decela în marea existenţei, într-o străfulgerare, imuabilitatea Binelui platonician.[38] De altfel, Homer îi atribuia lui Proteu cunoaşterea numărului şi a calculelor (*légein*) numerice (*Odiseea*, IV, 411-13).

Dar creşterea şi micşorarea nu erau doar procese generice, ele se puteau referi la fenomene de expansiune şi de contracţie generate de un nucleu iniţial, de o formă originară care se menţine invariantă pe parcursul procesului. Această împrejurarea permitea asocierea lui *phýsis* cu matematica. Asociere care a stat la baza unei *tehnici* de mărire (ori de micşorare) menită să se perpetueze

prin secole, o tehnică recognoscibilă până și în *computatio* algebrică cea mai avansată.

În Grecia, problema măririi figurilor geometrice apare în mai multe istorisiri. Din scrisoarea lui Eratostene către regele Ptolemeu aflăm că Minos trebuia să dubleze un mormânt regal în formă de cub și că, la Delfi, construcția unui altar cubic dublu față de cel existent ar fi fost prescrisă de oracolul lui Apolo ca remediu împotriva unei molime. Și celebrul colos din Rhodos trebuia dublat. Nu există în Grecia nici un tratat pe tema creșterii figurilor geometrice, dar istorisirilor din tradiția greacă li se adaugă o circumstanță neaccidentală care face să apară cu mai multă claritate o conjectură despre originile matematicii: combinația sistematică de matematică și religie în gândirea rituală a Indiei vedice. Tema creșterii altarelor în *Śulvasūtra* îngăduie descifrarea sensului celor întâmplate în Grecia.

Semnificația duplicării cubului, explica Eratostene, stătea în ideea creșterii formelor. Era vorba despre dezvoltarea, pornind de la un nucleu inițial, a unei progresii indefinite de figuri la scară crescătoare. Creșterea e întotdeauna *în altceva*, e mișcare ce alienează și îndepărtează, dar se poate realiza și în șiruri de figuri asemenea. Tehnica de mărire a unei figuri geometrice ne permite să construim, pornind de la un triunghi sau un pătrat, o figură mai mare care e tot triunghi sau pătrat. La modul general, am fi capabili, explică Eratostene,

> să transformăm în cub orice figură solidă dată care ar fi delimitată de paralelograme, sau s-o facem să treacă dintr-o formă în alta (*ex hetérou eis héteron*) și s-o facem asemenea [unei figuri date] și s-o amplificăm (*epaúxein*) respectând asemănarea, și asta chiar când e vorba despre altare sau temple [...]. Dar invenția mea va fi utilă și celor care ar vrea să amplifice (*epaúxein*) dimensiunile catapultelor și ale [altor] mașini balistice, unde totul trebuie să crească (*auxethênai*) proporțional, lățime, lungime [...] dacă vrem ca bătaia tirului să crească proporțional.[39]

Pentru Platon, matematica era utilă mai ales pentru „a face sufletul însuși pregătit să se întoarcă lesne dinspre devenire către

adevăr şi către fiinţă" (*Republica*, 525 c), dar el spunea chiar că *phýsis*, natura, se află ca întipărită în progresiile numerice. Ambele constau în mod tipic într-un flux, o geneză progresivă de forme care pornea dintr-o „sămânţă" capabilă să se amplifice şi să se reproducă nelimitat. Problema duplicării unui pătrat, propusă în *Menon*, avea cel mai probabil această semnificaţie: nu doar exemplificarea unui proces de învăţare folosind *anámnesis*, dar şi reproducerea în figuri ideale a propulsiei lui *phýsis* într-o creştere potenţial infinită de forme asemenea.

De *phýsis* se leagă şi concepţia platoniciană de punct geometric, înţeles, aminteşte Aristotel (*Metafizica*, 992 a), ca punct iniţial, principiu generator al dreptei. Platon nu accepta ideea punctului ca minim static, ca parte constitutivă a unei drepte ori a unui volum. A.E. Taylor atrage pe bună dreptate atenţia că aici se ascunde conceptul care apare din nou mai târziu, în platonismul grec, de dreaptă înţeleasă ca *fluxiune* (*rhýsis*) a unui punct, termen pe care Newton îl va introduce în limba engleză pentru a exprima ideea centrală a calculului care se dezvolta în secolul XVII.

Newton considera matematica mai degrabă o metodă decât o explicaţie efectivă a lucrurilor, şi deci evita orice definiţie care să explice natura *mişcării instantanee*. Dar nu evita conceptul, ba chiar îl punea la baza tratatului său *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, scris în 1671 şi publicat în 1736.[40] În acest tratat, Newton descria cantităţile variabile nu ca pe agregate de elemente infinitezimale, ci ca entităţi generate de mişcarea continuă a punctelor, liniilor şi suprafeţelor, şi numea *fluxiune* (*fluxion*) viteza instantanee de generare. În cel mai simplu dintre cazuri, termenul *fluxiune* denumea viteza instantanee a unui punct care se mişcă de-a lungul unei drepte. Ulterior, după 1690, Newton a încercat să construiască perfect riguros teoria fluxiunilor, definind conceptele principale în termenii unei geometrii analitice a cărei supremaţie o revendica în raport cu alte discipline. Propunea atunci două definiţii care fac să reiasă încă şi mai bine importanţa ideilor

de creştere şi micşorare pentru istoria generală a gândirii ştiinţifice din Occident:

1. *fluens est quod continua mutatione augetur vel diminuitur,*
2. *fluxio est celeritas mutationis illius.*[41]

Aşadar *fluens* era ceea ce se mărea sau se micşora în urma unei mişcări continue, iar *fluxio* era viteza acelei mişcări. La Newton, conceptele fundamentale ale analizei se trăgeau din ideile de creştere şi micşorare raportate la momentul începerii procesului respectiv. Infinitul potenţial şi dinamic reprezentat în formalismul calculului diferenţial din secolul XVII a fost depăşit, graţie unui concept riguros de *limită*, de un infinit actual mult mai adecvat, se spera, pentru a conferi continuului o existenţă *reală*.

Pentru Platon, ca şi pentru pitagoreicii care l-au precedat, numărul făcea posibilă un fel de activitate unificatoare a conştiinţei faţă de multiplicitatea percepţiilor. Ar fi neverosimil, se arată în *Theaitetos* (184 d), ca multiplicitatea percepţiilor particulare să rezide în noi de o manieră confuză, fără a converge „către o unică formă, fie că trebuie s-o numim «suflet», fie în alt fel, formă cu care [...] să percepem lucrurile perceptibile"*

Cum acţionează sufletul? El e făcut astfel încât tinde către fiinţa care însoţeşte toate lucrurile, spune Platon în *Theaitetos* (186 a-b), stabilind raporturi (*analogizein*) între lucruri antitetice şi confruntând în sine trecutul şi prezentul cu viitorul. Aşadar, o funcţie a sufletului constă în stabilirea unei legături între două percepţii distincte care se succed în timp, legătura ideală fiind aceea care face recognoscibil un *acelaşi* lucru în timpul transformării sale în *altceva*. Inteligibil e numai ceea ce, chiar supus transformării, rămâne recognoscibil. În absenţa unei legi numerice care să permită recunoaşterea entităţii care se transformă, fluxul percepţiilor degenerează într-un haos fără de leac.[42]

Aşadar, matematica poate permite găsirea unei legături stabile între percepţii distincte. Dintre matematicienii secolului trecut,

* Trad. de Andrei Cornea în Platon, *Theaitetos*, Editura Humanitas, Bucureşti, 2012. (*N. t.*)

cel care intuit perfect acest lucru a fost Brouwer, pentru care primul fenomen din care-şi trage forma gândul e o succesiune temporală din care conştiinţa noastră reţine o primă senzaţie în actul trecerii la o senzaţie succesivă. Pentru Brouwer, fenomenul se repetă iterativ, iar conştiinţa noastră, distingând senzaţia trecută de cea prezentă şi retrăgându-se din ambele, pune în mişcare activitatea noastră mentală. O formă matematică a acestui proces constă tocmai în procedurile de calcul iterativ în care variabila se apropie de soluţia unei probleme printr-o succesiune de valori aproximative, fiecare calculată din precedenta aplicând repetat un anumit operator. În treacăt fie spus, Norbert Wiener s-a gândit la mecanisme iterative analoage pentru simularea comportamentului organismelor vii, mai ales în cazul în care intervin fenomene retroactive (*feed-back*). A apuca un obiect, nota el, constă în reducerea progresivă a distanţei reziduale dintre mână şi obiect, exact cum în procesele iterative se reduce gradual distanţa reziduală dintre valoarea variabilei şi soluţia căutată.

5
Katà gnómonos phýsin

Cum trebuie gândit numărul în aşa fel încât să-şi îndeplinească sarcina de a pune în legătură percepţiile sufletului? Numărul poate fi gândit în varii moduri, dar un fragment din Philolaus ni-l indică pe acela corect, adaptat capacităţilor agregatorii ale gândirii noastre, şi tocmai acesta stă la originea algoritmilor iterativi ai matematicii. Numărul, citim în acel fragment, „armonizează cu senzaţia, potrivit cu natura sufletului, toate lucrurile, astfel că le face cognoscibile şi comensurabile după natura gnomonului (*katà gnómonos phýsin*), pe măsură ce compune şi descompune raporturi, luate fiecare în parte, atât pentru obiectele nemărginite, cât şi pentru cele care delimitează" (44 B 11 DK). Sunt aici toate elementele decisive: numărul, sufletul, lucrurile (*prágmata*), percepţia, cognoscibilitatea, rapoartele, finitul, infinitul şi, în fine, natura gnomonului. Gnomonul, explica Heron din Alexandria (*Definiţiile*, 58) e acea figură care, aplicată unei forme geometrice date, generează o alta asemenea celei dintâi. Numerele pitagoreice erau puncte dispuse *în spaţiu într-o anumită ordine geometrică*, iar creşterea lor era conformă naturii gnomonului: numărul 4 consta din patru puncte dispuse într-un pătrat; înconjurându-le cu un gnomon de 5 puncte dispuse în unghi drept, se obţine numărul pătrat succesiv, adică 9. La fel se obţin 16, 25, 36, 49..., adăugând de fiecare dată un număr impar de puncte dispuse în unghi drept. Graţie traducerii *Śulvasūtrei* lui Baudhāyana datorate lui

George Thibaut, din anii '70 ai secolului XIX, se poate observa perfecta analogie dintre cărămizile altarelor vedice şi numerele pitagoreice. Reţeta pentru construirea altarului lui Agni era următoarea: începeţi cu un pătrat mic, de 4 cărămizi; apoi, adăugând 5 cărămizi, ajungeţi la unul de 9; apoi, din nou, adăugând încă 7, ajungeţi la un pătrat de 16.[43] Cel care stabilea dimensiunile altarului avea, evident, ideea creşterii potenţial infinite a seriei numerelor pătrate.

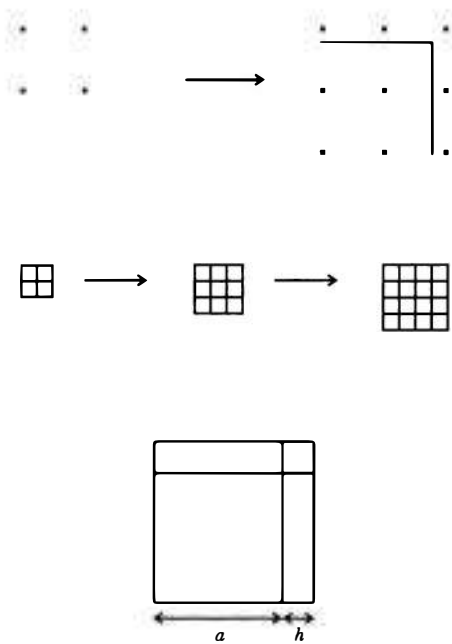


Figura 2

De ce acest mod de dispunere a numerelor realizează scopul anunţat de a face posbilă cunoaşterea lucrurilor? Ca să înţelegem, e nevoie să reproducem în continuul geometric ideea de augmentare folosind gnomoanele, având în minte pătratul ca exemplu particular. Euclid folosea imaginea unei augmentări de felul acesta ca

să demonstreze versiunea *geometrică* a formulei algebrice a pătratului unui binom: împărțind o linie dreaptă în două segmente, a și h, pătratul pe întreaga linie $a+h$ e egal cu pătratul pe a plus pătratul pe h plus de două ori dreptunghiul de laturi a și h. Teoremă care se exprimă prin simpla formulă a creșterii pătratului propusă în *Śulvasūtra* lui Āpastamba: $(a+h)^2 = a^2+2ah+h^2$. Newton și Raphson vor utiliza această formulă pentru a rezolva numeric o ecuație pătratică precum $x^2-2 = 0$. Punând $x = a+h$, unde a e o aproximare inițială a lui $\sqrt{2}$, și neglijându-l pe h^2, ecuația devine $a^2+2ah = 2$, de unde $h = -(a^2-2)/2a$. De aici, metoda iterativă $x_{k+1} = x_k-(x_k^2-2)/2x_k$, unde k = 0,1,2, , …, și $x_0 = a$.

Teorema lui Euclid (*Elementele*, II, 4) înseamnă mult mai mult decât afirmă și ne putem întreba până la ce punct era conștient de asta Euclid însuși. Sensul expresiei *katà gnómonos phýsin* din fragmentul lui Philolaos trebuie legat de semnificația fundamentală a lui *phýsis* în sens de *creștere*, iar Euclid ne spune de fapt cum crește un pătrat când i se mărește latura a cu un segment h. Interpretat astfel, sensul teoremei se schimbă radical. Segmentele a și h nu sunt de același tip, pentru că h trebuie interpretat ca un *increment* al lui a. De aici pornește analiza: ne întrebăm, în general, cum se schimbă valoarea unei funcții $f(x)$ dacă x suferă o creștere h? Euclid (II, 4) consideră cazul funcției $f(x) = x^2$, problema fiind determinarea variației pătratului lui x atunci când variază x. Dar problema e cu totul generală: e vorba de a ști cum apare o creștere (sau o descreștere) a unei mărimi A care depinde de o altă mărime B atunci când aceasta din urmă suferă un increment, pozitiv sau negativ. Primul răspuns exhaustiv la această întrebare apare în celebrul tratat *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londra, 1715), în care Brook Taylor introduce o formulă care exprimă modul de variație a unei funcții $f(x)$ la incrementări mici ale variabilei x. Ulterior, Lagrange avea să pună formula lui Taylor drept principiu fundamental al calculului diferențial. Într-o direcție sau în cealaltă, incrementările lui x pot determina descreșterea funcției f, obținându-se astfel o clasă de metode pentru căutarea

valorii lui x pentru care f își atinge minimul. Importanța acestui fapt se poate vedea în celebrele cuvinte ale lui Leonhard Euler, pentru care perfecțiunea universului se exprima în aceea că, în lume, nu se întâmplă nimic fără să intervină vreo regulă de minim sau maxim.

E dificil de imaginat cum ar fi posibil să măsurăm în absența unui asemenea aparat analitic efectul unei perturbări suferite de o mărime ca urmare a alterării alteia. În formulele analizei găsim primele instrumente pentru studiul stabilității unui sistem de calcul în prezența unor erori perturbative asupra datelor și asupra operațiilor. Formula pătratului binomului permite considerarea a două momente succesive ale schimbării, de la a la $a+h$, și găsirea unui pătrat pornind de la unul inițial dat. Această împrejurare implică o stabilitate, o invarianță în schimbare pe care se bazează *epistéme*, puterea de a ne fixa mintea asupra a ceva. Transformarea nu e doar *în altceva* (*eis állo*), devenirea nu e doar non-ființă. În această viziune, *phýsis* devine un flux de generare iterativă de forme asemănătoare, sau cel puțin ne convingem că e posibil să fie așa și studiem cazurile în care e efectiv așa. Dar aici se anunță deja un calcul algebric, modelat pe creșterea figurilor geometrice, în care fenomenele de creștere și de generare a *phýsis*-ului și-ar fi putut găsi reprezentarea matematică. Aceeași lege e valabilă și în experiența comună: în lipsa repetiției, scrisese Proust, prevalează irealitatea.[44]

Metodele puse la punct de Viète, Newton și Raphson, pe baza formulei pătratului binomului, pentru a rezolva numeric o ecuație algebrică au ajuns pe bună dreptate faimoase. E vorba despre cel mai puternic și eficient mecanism de rezolvare a ecuațiilor și calcul al minimului unei funcții pe care matematica a izbutit să-l reelaboreze în epoca modernă, mergând pe urmele unor foarte vechi reguli computaționale. S-a demonstrat de curând, cu doar câteva decenii în urmă, că metoda lui Newton pentru aproximarea rădăcinii pătrate a unui număr e cea mai eficientă posibil, în termeni de viteză a convergenței și de complexitate a calculului. Și

la fel de recentă e dezvoltarea metodelor de calcul al minimului unei funcții care generalizează schema lui Newton.[45]

Cu toate acestea, nu poate fi neglijată nici aici o anume situație critică pe care o regăsim în calculul digital în multe alte forme și care e una dintre principalele cauze ale instabilității algoritmilor numerici. În fracțiile *p/q* generate cu metoda lui Newton de aproximare a soluției unei ecuații, numărătorul *p* și numitorul *q* pot crește repede peste limite admisibile, ducând astfel la o majorare a costului computațional și la o pierdere de informație datorată operațiilor de rotunjire.[46] În calculul rădăcinilor pătrate sau cubice, creșterea numerelor e legată de creșterea sau descreșterea unei figuri geometrice *via* corecții gnomonice succesive și, în logica originară a procedurii, de o diminuare progresivă a unității de măsură.

Pe aceeași schemă a metodelor lui Viète și Newton se bazează azi strategiile de optimizare numerică pentru calculul minimelor și maximelor funcțiilor. De aceleași strategii depind și procesele de învățare automată cu rețele neuronale, care se bazează pe calculul unor parametri pentru a reduce progresiv ecartul dintre răspunsul calculat și cel așteptat. În sensul acesta, învățarea sau, mai bine zis, modelul de învățare realizat de rețelele neuronale e identic din punct de vedere conceptual cu un proces de optimizare. Dar calculul analitic nu e întotdeauna capabil să garanteze reușita operațiunii. În procesele automate de învățare pot apărea adesea creșteri necontrolate ale valorilor numerice, datorate alcătuirii greșite a matricelor, acestea ducând la o pierdere fatală a semnificației rezultatelor calculului.

6

Dýnamis. Capacitatea de a produce

În Grecia, mărirea pătratului sau a altor figuri geometrice exprimă o producere activă, aproape o germinare, asemănătoare celei sugerate de *phýsis*-ul orficilor. O idee de acelaşi fel se găseşte în *dýnamis*-ul datorită căruia o suprafaţă de extinde dincolo de o anumită linie. Euclid ne-a învăţat să construim un pătrat peste o linie dreaptă, în sensul extragerii figurii *dintr-o* latură.[47] Mai târziu, Proclus (*Comentariu la Cartea I a „Elementelor" lui Euclid*, 423-24) pare să fi remarcat diferenţa dintre a construi (*systésasthai*) un triunghi şi a trasa (*anagráphein apó*) un pătrat aproape *producându-l* plecând de la o singură latură. În matematica mesopotamiană apare un termen cu semnificaţie incertă, *takīltu*, care ar putea să desemneze şi el, conform unei ipoteze a lui Thureau-Dangin, „acela din care s-a produs ceva", ca un număr care, înmulţit cu el însuşi, produce un pătrat.[48] Teorema lui Pitagora, a cărei demonstraţie se găseşte în *Elementele* lui Euclid (I, 47), ar putea răspunde criteriului de creştere a figurilor geometrice care-şi păstrează forma nealterată. Din două pătrate se construieşte un al treilea mai mare, sumă a primelor două, acesta fiind produs din diagonala dreptunghiului ale cărui laturi coincid cu laturile celor două pătrate. Creştere şi producţie par să fie supuse unei aceleiaşi legi.

Teorema lui Pitagora era cunoscută în matematica mesopotamiană antică, chiar dacă nu înregistrăm o demonstraţie ca aceea

a lui Euclid. Babilonienii încercau să rezolve în mod algoritmic probleme concrete particulare care nu aveau acel grad de abstractizare şi de generalitate întâlnit în teoremele lui Euclid. Calculele babiloniene arată în schimb stăpânirea unor scheme computaţionale pe cât de eficiente pe atât de perene, scheme care încă stau la baza calculelor mai avansate cu care rezolvăm azi probleme matematice complexe. O problemă a matematicii babiloniene consta în măsurarea diagonalei unei porţi de formă dreptunghiulară cu înălţimea şi lăţimea cunoscute. Scribul ne indică rezolvarea problemei măririi unui pătrat, care sugerează o schemă de calcul analoagă celei pe care matematica modernă a adoptat-o pentru rezolvarea unei ecuaţii algebrice.[49] Aşadar, pentru a respecta criteriile calculului, teorema lui Pitagora e legată explicit de creşterea unei figuri geometrice.

În *Śulvasūtra* lui Āpastamba (I, 4-5), aceeaşi teoremă a lui Pitagora e formulată în aşa fel încât să pună în evidenţă faptul că diagonala unui dreptunghi produce (*karoti*) în afara ei ceea ce latura mai mică şi aceea mai mare produc (*kurutas*), fiecare în parte, în exterior.[50]

În limba greacă, *poieîn* e legat, ca şi sanscritul *vi-hṛ*,[51] de principiul elementar al *construcţiei* figurilor geometrice de dimensiuni crescătoare, conform unor criterii care au marcat şi geometria antică, şi calculul numeric – antic şi modern deopotrivă. În *poieîn* e ideea operării în mod eficient: de exemplu, putem calcula efectiv expresia unei înmulţiri sau a ceea ce azi numim, nu întâmplător, „produs".

În matematica greacă, termenul *dýnamis*, care trimite la posibilitatea ori la capacitatea de a fi sau de a deveni ceva, denumeşte latura unui pătrat, sau rădăcina pătrată al numărului care-i măsoară aria. Liniile conotate de o *dýnamis* mai pot semnifica deci pătratele ale căror laturi sunt: rădăcina pătrată a lui 3 poate să semnifice pătratul de arie 3 (*Theaitetos*, 147 d şi urm.).

În *Politica* (266 a-b), Platon se referă la diagonală şi la diagonala diagonalei, ca şi cum ar fi vorba despre o generare progresivă,

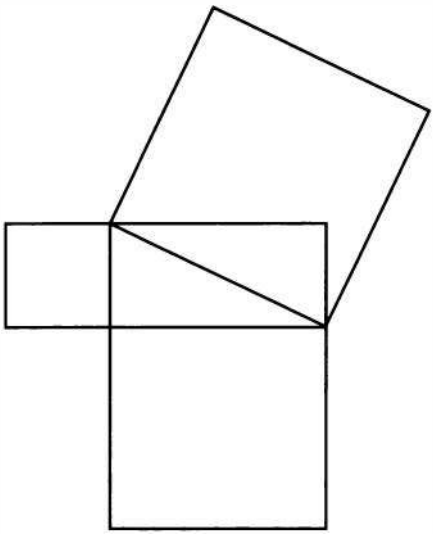


Figura 3

indefinită, de dublări ale unui pătrat pe care latura pătratului inițial are *puterea* să le genereze.

În tradiția orfică și pitagoreică (Philolaus, 44 B 11 DK și 315 Kern) această idee de putere era conținută în perfecțiunea decadelor, care era „principiul vieții divine, cerești și umane" fără de care „toate lucrurile ar fi fost nelimitate, obscure și incerte"

Corespondentul lui *dýnamis* în matematica antică babiloniană era *mithartum*, pătratul geometric produs din rădăcina sa pătrată (*íbsi*).[52] În geometria altarelor vedice, generarea pătratelor succesive, unul din diagonala celuilalt, e redată prin termenul *dvikaraṇī*, diagonala care produce dublul,[53] adică, potrivit indicațiilor din *Menon*, o succesiune indefinită de pătrate, fiecare fiind dublul celui dinainte, deci cu diagonala egală cu latura celuilalt. În toate aceste cazuri, esențial este fenomenul *producerii*: o entitate matematică *produce* o alta, ca și cum ar fi vorba despre o forță de amplitutine progresivă, inerentă entităților matematice înseși. Mai

târziu, se va spune, în mod asemănător, că aritmetica fracțiilor produce fenomene care permit recunoașterea și definirea de noi entități numerice: numerele reale, definite de Dedekind ca *tăieturi*, vor fi *produse* de proprietăți particulare ale numerelor raționale.

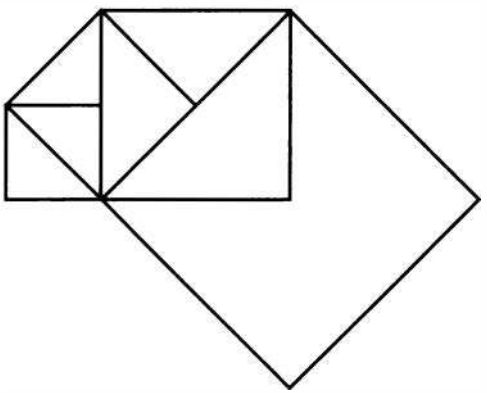


Figura 4

Pentru Heidegger, sensul lui *poiesis*, al producției, e nodul central al *téchne*-ului grec, el precizând că, în această accepțiune, orice producție se bazează pe adevărul „dezvăluirii" Cu totul diferit e, pentru Heidegger, cazul tehnicii moderne în care dezvăluirea nu e o producție (*poiesis*), ci o provocare (*Herausfordern*), una care conduce fatalmente la o pretenție de exploatare industrială a energiei conform criteriului degenerat de maximă utilizare cu cost minim.[54] Algoritmii care permit această trecere critică, degenerarea producției, se bazează totuși pe aceleași operații elementare ale matematicii antice, anume acelea gândite pentru producție. Eliminarea semnificației pe care o aveau acele operații în cunoașterea antică a scos în evidență partea lor cea mai aridă, cea mai instrumentală și cea mai aservită azi scopurilor operativității tehnologice.

Implicațiile ontologice ale lui *dýnamis* din matematică apar cu maximă claritate într-un pasaj din *Sofistul* lui Platon (247 d-e):

Afirm că tot ce posedă capacitatea (*dýnamin*) determinată de a săvârși (*poieîn*) firesc ceva, sau de a suferi o dată măcar cât de cât înrâurirea lucrului celui mai de rând, tot ce e de acest soi există cu adevărat (*toûto óntos eînai*). Căci eu pun drept definitoriu pentru realități faptul că «a fi» nu înseamnă altceva decât a fi capabil de ceva (*dýnamis*).*

Calea către ființă, spune Străinul din *Sofistul* e tocmai o producere și ceea ce e menit să existe trebuie definit ca „produs" (*Sofistul*, 219 b). Socrate (*Republica*, 477 c) observa și că în *dýnamis* putem găsi felurile celor ce sunt (*génos ti tôn ónton*), observație reluată punctual de Proclus (*Comentariu la „Republica" lui Platon*, I, 266, 17). Și tot Străinul din *Sofistul* (238 a) considera „întreg domeniul numărului printre lucrurile care sunt", în timp ce semnificația lui *dýnamis* ca putere de extensiune și ca principiu de generare naturală, ca mișcare cauzată de un *phýsis* care face literalmente să germineze entitățile după modelul progresiilor numerice, e explicitată în *Epinomis* (990 c):

Cea dintâi [disciplină] e aceea a numerelor nu a celor concrete, ci a numerelor în sine, ca [aceia care o studiază] să-și dea seama de orice posibile generare și potențialitate (*dynámeos*) de creștere [cu ridicare la pătrat și la cub] al celui cu soț și al celui fără soț, și al efectului pe care acesta îl are în ce privește natura (*phýsis*) lucrurilor.

În *Philebos* (15 d; 25 d-e), Platon văzuse o paradoxală posibilitate de coincidență între unul și mulți prin mijlocirea *lógos*-ului, adică a raportului matematic (*tautòn hèn kaì pollà hypò lógon*) și fixase în număr și în rapoarte capacitatea de a face să înceteze opozițiile dintre contrarii. În număr, așadar, nu se exprima o simplă multiplicitate, ci dimpotrivă, realizarea, grație raportului, a acelei sinteze între unu și multiplu care face parte din natura comună a lucrurilor *reale*. Aceasta era, spune Platon, o revelație transmisă nouă de „cei vechi, fiind mai vrednici și locuind mai aproape de

* Trad. de Constantin Noica în Platon, *Opere*, vol. VI, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1989. (*N. t.*)

zei" (*Philebos* (16 c).* În *Timaios* (52 c) se arată din nou că *lógos*-ul e „raționamentul adevărat și exact, potrivit căruia, câtă vreme cele două sunt lucruri distincte, nici unul dintre ele nu poate vreodată să ia naștere în celălalt pentru a ajunge să fie unul și același lucru și totodată două."** Aici, *lógos*-ul nu e doar discursul ori raționamentul, ci, într-un mod mai specific, e *raportul*, pentru care matematica e chemată să construiască definițiile potrivite. Raportul matematic e instrumentul care pune în relație un lucru cu altul, făcând din ele *unul* și *două* deopotrivă, exact așa cum se vede într-o succesiune de figuri asemenea care sunt multe, și totuși, datorită invarianței formei, una singură. Progresii asemănătoare pot interveni, în mod tipic, chiar în definiția raportului, conform indicațiilor lui Aristotel (*Topica*, 158 b), ca *antanaíresis*, de exemplu algoritmul euclidian pentru calculul măsurii comune a două mărimi puse în relație reciprocă. Fără cunoașterea numărului, spune Platon, ne-ar lipsi posibilitatea cunoașterii realității, despre care am putea avea doar percepții și amintiri (*Epinomis*, 977 c).

Numerele erau ultima apărare a unei existențe efective împotriva posibilei pulverizări în multiplicitate. Deloc surprinzător așadar, fragmentul din Archytas în care se spune că știința calculului are, față de înțelepciune, o superioritate netă în fața altor discipline și reușește să trateze ceea ce dorește în mod mai clar și mai evident (*enargéstero*) chiar și decât geometria. Termenul *enargés* trimite la ceva ce apare și poate fi înțeles în mod transparent, palpabil, aproape dotat cu corporalitate. În cazuri excepționale, la asemenea apariții se puteau preta chiar și zeii (*Odiseea*, XVI, 161). Iamblichos observase că Pitagora definise numărul ca *extensiune* și *punere în act* (*enérgeian*) a *lógos*-ului seminal imanent în unitate.[55] E o mărturie importantă care ne face să înțelegem semnificația numerelor ca proces de creștere înscris adânc în *phýsis*; un

* Aici și mai departe, pentru versiunea românească a lui *Philebos* folosesc traducerea lui Andrei Cornea (Editura Științifică, București, 1993). (*N. t.*)

** *Timaios*, traducere de Cătălin Partenie (Editura Științifică, București, 1993). (*N. t.*)

proces care se desfăşoară în mod gradual, spun orficii, ca în textura unei ţesături (Aristotel, *Despre generarea animalelor*, 734 a) sau într-un fel de ramificare progresivă (316 Kern).

Aceste indicii puse laolaltă par să sugereze că numărul era conceput ca entitate fizică, dar cu siguranţă nu datorită absenţei capacităţii de abstractizare. Numărul era mai degrabă *res vera*, raţiunea ultimă a existenţei în act şi a realităţii lucrurilor, principiul evidenţei existenţei lor în lume, împotriva tuturor argumentelor posibile în favoarea caracterului iluzoriu al realului. Privit astfel, ca entitate în măsură să reprezinte un domeniu al adevărurilor evidente şi intangibile, numărului îi revenea funcţia de racord între uman şi divin.[56]

După cum scria Simone Weil, „conştiinţa şi realitatea sunt proporţionale cu multiplicitatea sistemelor care intervin simultan într-o operaţie unică a spiritului."[57] Numărul a fost întotdeauna cel care a permis această operaţie în varii moduri posibile, indiferent de felul cum a fost el considerat în diverse contexte de-a lungul secolelor: ca principiu al combinării unor entităţi diverse într-o aceeaşi clasă; ca sinteză a unor operaţii individuale, diferite într-o unică funcţie definibilă recursiv; ca număr real, atomic, element al unui corp abstract dens, ordonat şi complet; ca tăietură a corpului raţional, prin analogie cu conceptul euclidian de raport; ca număr conceput potrivit naturii gnomonului, care realizează legătura dintre două momente ale creşterii unei figuri geometrice, permiţând recunoaşterea acelei figuri în urma transformărilor la care e supusă; în fine, ca proces computaţional, ca algoritm care trebuie să răspundă unor cerinţe precise de eficienţă.

Plotin afirmase că toate cele inteligibile sunt, într-un anume sens, şi lucruri reale (*kaí noerà kaí pos tò prâgma*). Aşa se întâmpla cu suprafaţa, cu solidul şi cu toate figurile, când era vorba despre ale lor *unde* şi *cum*: „Căci nu noi inventăm figurile geometrice. Aceasta este dovedită de faptul că figura geometrică a Universului există dinaintea noastră, şi [la fel] celelalte, câte sunt figuri geometrice naturale (*physikà schémata*) prezente în realităţile

naturale (*phýsis*), care în mod necesar (*anánke*) sunt anterioare corpurilor, fiind Acolo fără figură [vizibilă] sau în calitate de figuri primare (*prôta schémata*)."* (*Enneade*, VI, 6, 17, 20-25).

Împrejurarea decisivă, raţiunea principală a legăturii care unea matematica şi realitatea, era că „nemărginirea e în luptă cu numărul" (*Enneade*, VI, 6, 17, 4) (chiar dacă spunem că numărul e infinit, pentru că de îndată ce gândim un număr, imediat putem gândi unul mai mare). Numărul şi rapoartele dintre numere erau marcate de o limită, fiind astfel opusul lui *apéiron*, al nelimitatului, sinonim al absenţei (*stéresis*), al irealităţii, al ne-fiinţei. Două erau infiniturile lui Plotin: unul era modelul, celălalt imaginea; şi din acestea două, cel care se numea cu mai multă îndreptăţire infinit era al doilea (*Enneade*, II, 4, 15, 20-25). Materia (*hýle*) era infinită prin opoziţia ei faţă de *lógos*, adică faţă de raport, care, în schimb, făcea posibilă, prin măsurarea unui lucru cu ajutorul altuia, o dispunere ordonată a lucrurilor reale în spaţiu şi în timp. Noţiunea modernă de număr s-ar trage deci din raport.

Pentru stoici (*Stoicorum Veterum Fragmenta* [*SVF*], II, p. 328) natura era însăşi forţa care ţine unit ansamblul cosmosului, ca şi principiul generator al fiinţelor terestre. Principiul era ascuns în *spermatikòs lógos*, *lógos*-ul seminal de care depindea organizarea oricărui lucru, însufleţit sau neînsufleţit, şi care-şi avea contrapartida în unitatea din care emană şirurile de rapoarte care aproximează numerele iraţionale.[58]

Şi printre neoplatonicieni era încetăţenită considerarea numărului în strânsă relaţie cu *phýsis*, ceea ce era coerent cu observaţia platoniciană despre felul cum se conformează natura progresiilor numerice (*Epinomis*, 990 e). Conceptul de *physikòs arithmós* apare la Plotin (*Enneade*, VI, 6, 16, 45-46) şi la Nicomachus din Gerasa (sec. I-II d.Cr.)[59], pentru care natura, *phýsis*, era un ţesut format din numere şi din rapoarte prin mijlocirea fluxurilor generative organizate după legi aritmetice precise. În secolul XI, Mihail Psellos

* Plotin, *Opere*, vol. II (trad. Andrei Cornea, Editura Humanitas, Bucureşti, 2006). (*N. t.*)

concepea numărul fizic (*physikòs lógos*) ca un concept complementar numărului matematic. Primul, mai apropiat de lucrurile inferioare, era principiul esențial al corpurilor vii, plante și animale, deoarece fiecare dintre acestea se naște, crește și moare în intervale determinate de timp.[60]

E foarte posibil ca tot acest complex grandios de doctrine, de aluzii sistematice la afinitatea dintre număr și *phýsis*, să se fi bazat pe faptul că numărul trebuia să fie gândit „conform naturii (*phýsin*) gnomonului": împrejurare care făcuse operațional, și avea să-l facă încă mai mult în viitor, un model și un sistem de algoritmi pentru descrierea matematică a naturii. De-a lungul veacurilor, „realitatea numărului" nu avea să răspundă numai viziunii filozofice a unui cosmos *noetós*, a unui univers divin și inteligibil, dar și realei descifrări a naturii cu ajutorul modelelor simbolice. Mult timp încă, gnomonul nu și-a dezvăluit eficiența. Dar după Viète și Newton, aceleași scheme pe care se bazau vechii algoritmi greceşti, indieni și babilonieni au folosit la definirea structurii metodelor mai avansate ale științei calculului. Pentru a pătrunde în combinația de calcul și înțelepciune din lumea antică, nu ajung doar formulele filozofice: e nevoie să urmărim fiecare detaliu computațional pentru a-i înțelege adecvarea și contribuția teoretică la formulele respective.

7
Intermezzo. Mecanica spirituală

Antichitatea ne-a transmis două judecăţi laconice şi enigmatice asupra naturii sufletului. Conform primeia, atribuite lui Heraclit, sufletului îi corespunde un *lógos* care se sporeşte pe sine (22 B 115 DK). Conform celei de-a doua, atribuite lui Xenocrate, căruia i-a fost încredinţată direcţia Academiei platoniciene după Speusippos, „sufletul e un număr care se mişcă pe sine" Aristotel (*Despre suflet*, 408 b 34 urm.) rânduia judecata lui Xenocrate printre teoriile complet iraţionale, dar nu considerea inutil să zăbovească asupra motivelor care-l făceau să o respingă. Acestui fapt i se poate adăuga legătura intimă dintre o filozofie a sufletului şi o teorie cuprinzătoare a naturii universului prefigurată într-o întrebare ridicată de Socrate (*Phaidros*, 270 c): „Însă crezi oare că natura (*phýsin*) sufletului poate fi pricepută cum trebuie fără să cunoşti natura (*phýseos*) întregului univers?" Răspunsul, evident negativ, pune indirect alături numărul şi sufletul, deoarece Platon afirma că în progresiile numerice se putea citi *phýsis*-ul, iar „natura" sufletului era tocmai *phýsis*-ul său, adică creşterea sa în *lógos*.

Cuvintele lui Heraclit sunt intraductibile şi se pretează la diverse interpretări, în funcţie de sensul pe care îl ia, dintre multele ale sale, cuvântul *lógos*. Dar în propoziţia aparent absurdă a lui Xenocrate, ceea ce pentru Heraclit era *lógos* ar putea fi, în termeni mai precişi, numărul. Nici *lógos*-ul lui Heraclit, nici numărul lui Xenocrate nu sunt fixe, primul creşte, al doilea se mişcă. Pe de

altă parte, Aristotel foloseşte cuvântul *kínesis*, mişcare, pentru orice tip de proces în cursul căruia un lucru îşi poate schimba aspectul, natura sau poziţia. Am putea afirma că *kínesis* se referă şi la numărare, la o mişcare măsurată, la o scurgere a timpului marcată uniform de numere. În plus, ştim că printre primele semnificaţii ale lui *lógos* e aceea de a alege şi de a trece în revistă numărând.

Pentru stoici, pasiunile sufletului erau de obicei raportate la natură (*phýsis*). Ele urmau sau, mai adesea, nu se supuneau *lógos*-ului, adică măsurii numerice. „Contra naturii" însemna, pentru Chrysippos „împotriva *lógos*-ului celui corect conform naturii (*katà phýsin lógon*)" (*SVF*, III, p. 94). Pentru Zenon din Kition (*SVF*, I, p. 51), pasiunea era o expansiune sau o contracţie nemăsurată (*álógos*) a sufletului, ca şi cum ar fi fost violate legile matematice de care depinde creşterea naturală, aceea pe care Platon o vedea întipărită anume în progresiile numerice. Pentru a înţelege legătura reciprocă dintre număr, suflet şi *phýsis*, fără a ţine cont de modificarea semnificaţiei acordate termenului de natură de-a lungul veacurilor, mai ales în al XVII-lea, putem apela şi la teza lui Spinoza, pentru care „natura este totdeauna aceeaşi, iar virtutea şi puterea ei de a lucra este pretutindeni una şi aceeaşi" (*Etica*, III, Prefaţă).

Mai există o particularitate care apropie enunţurile lui Heraclit şi Xenocrate: numărul se mişcă pe sine, *lógos*-ul se sporeşte pe sine. Mişcare şi creştere au loc datorită unei disponibilităţi intrinsece a sufletului pentru a creşte şi a-şi modifica singur, prin sine, starea, prin amplificări succesive, ca dintr-o sămânţă iniţială. Bruno Snell[61] observa că această putere a spiritului de a se dezvolta autonom îi era încă străină lui Homer, care pune întotdeauna orice augmentare a forţelor fizice şi spirituale pe seama intervenţiei unui zeu. Iar lui Homer i-ar fi fost străină chiar şi ideea de *prôton kinoûn*, de prim mişcător, care se poate referi la suflet, după cum fusese conceput de Aristotel.

Dar ce anume generează acel „prin sine" al sufletului dotat cu mişcare autonomă? Sămânţa creşte invizibilă la început, aproape în manieră mecanică, supusă unei virtualităţi a cărei origine rămâne necunocută. Simone Weil vorbeşte despre o „mecanică spirituală ale cărei legi sunt la fel de riguroase ca legile celeilalte mecanici, dar diferită de aceasta".[62] E o referire explicită la Marcu (4, 26-32) care vorbeşte despre o creştere automată (*mekýnetai, automáte*) a împărăţiei, pe nesimţite, la fel cum creşte o sămânţă în pământ. Dar sufletul e legat şi de trup, avertizează Platon (*Phaidon*, 83 d-e), şi orice plăcere sau durere îl fixează şi aproape ţintuieşte sufletul de forma corporală, făcându-l să creadă că e adevărat ceea ce spune trupul că ar fi adevărat. Urmând această înclinaţie, sufletul nu va putea ajunge pur în Hades, va cădea într-un alt trup şi va creşte potrivit naturii sale: „ca o sămânţă care încolţeşte într-un alt pământ. Astfel că nu îi este dat vreodată să sălăşluiască alături de ceea ce este divin şi pur veşnic păstrător al formei sale."

Ceea ce aminteşte de cuvintele lui Epicharmus despre creşterea conformă cu o lege dată, cuvinte care evocă, printr-o frapantă asemănare, una dintre poeziile lui Goethe:

> Precum în ziua, care-acestei lumi te dete,
> Sta soarele să-ntâmpine-n salut planete,
> Tu ai crescut mereu, prielnic, spre-mplinire
> Mânat de legea ta pe căile vieţii.
> Aşa eşti nevoit să fii şi nu-i scăpare,
> Astfel sibilele grăit-au şi profeţii;
> Putere nu-i, nici timp, să sfarme pe sub boltă
> Tiparele, ce vii şi trainic se dezvoltă.[63]

Atunci când e generat de o formulă iterativă – începând cu cea mai simplă, care constă în adăugarea, de fiecare dată, a unei unităţi unui întreg natural, pentru a-i găsi succesorul, până la cele mai complexe procedee recursive –, numărul, asemenea sufletului, se află într-o mişcare automată. Natura automată a proceselor aritmetice le era cunoscută lui Dedekind şi lui Turing, primul

introdusese mecanismul recursiei, al doilea – o noțiune mai explicită de mașină. Totuși, dacă nu Dedekind, cel puțin Turing era conștient de capcana posibilității ca numerele să crească nemăsurat. El înțelesese cum anume, în aritmetica mașinii, eroarea poate crește dacă numerele calculate devin foarte mari și, în cazul unui sistem de ecuații liniare, a cuantificat creșterea erorii cu ajutorul unor funcții care măsurau *mărimea* unor anumite matrice.

Dacă, așa cum observa Nietzsche, natura e într-adevăr excesiv de abundentă, „peste măsură de risipitoare, peste măsură de indiferentă, fără intenții și alte considerente";[64] dacă *phýsis* are cu adevărat acel caracter excesiv, de aflux supraabundent de prezență pe care i-o atribuia Heidegger, atunci e de crezut că și numărul, care se aseamănă cu *phýsis*, poate crește dincolo de orice control. Nu doar infinitul stătea în orizontul creșterii numerelor: cu calculul automat la scară mare, privirea a fost nevoită să învețe să se oprească mult mai devreme pe terenul accidentat și prea puțin cunoscut al finitului, fie el foarte mare sau foarte mic.

8

Paradoxurile lui Zenon. Explicarea mişcării

Cu Zenon din Elea începe cea mai paradoxală revelaţie a incognoscibilităţii infinitului, desfăşurată prin argumentaţii dialectice care, de-a lungul secolelor, nu au fost niciodată contrazise cu adevărat. Povestea paradoxurilor lui Zenon se compune din comentarii contradictorii, din critici şi respingeri, din reluări şi din confirmări surprinzătoare care au sfârşit prin a le răsturna sensul: Zenon avea dreptate, lumea trebuie reconsiderată în conformitate cu argumentele lui şi, dacă se elaborează o teorie matematică a continuului, coerentă şi adecvată, paradoxurile apar ca instrumente potrivite pentru reinterpretarea lumii reale. Ele nu verifică realitatea, ele chiar *sunt* realitatea şi indică direcţia în care matematica o poate reprezenta. Oricum, aceasta e explicaţia care pare să prevaleze în zorii veacului trecut, odată cu dezvoltarea unei teorii matematice a continuului ale cărei începuturi datează din a doua jumătate a secolului XIX.

Paradoxurile despre mişcare se bazează pe diminuarea progresivă a lungimilor parcurse şi pe observaţia că descreşterea *in infinitum* a segmentelor în care se divide dihotomic o linie continuă face ca lumea să ne apară drept ireală. Pare că, încă din secolele VI şi V î.Cr., infinitul (*ápeiron*) pătrunde în gândirea eleată ca o dilemă, exprimat fiind într-o dublă versiune: una afirmativă, mai ales prin Melissos, cealaltă negativă şi aparent în opoziţie cu prima, prin paradoxurile lui Zenon. Melissos se exprimă

altfel decât Parmenide, pentru care infinitul nu e un atribut al fiinţei, fiindcă e marcat negativ de o *non*-fiinţă, de absenţa (*stéresis*) conţinută în *ápeiron*-ul grec. În timp ce pentru Parmenide forţa necesităţii pare să constrângă fiinţa în lanţurile limitei (28 B 8, 26-33 DK), Melissos afirmă răspicat că fiinţa care era şi va fi întotdeauna, fără început şi fără sfârşit, este infinită, şi că nimic din cele care au început şi sfârşit nu se poate numi infinit (30 B 1-4 DK). Infinitul, afirma Melissos, este şi *unul* (30 B 5 DK), pentru că dacă ar fi *doi* are avea o limită în altceva (*pròs állo*).

Cât despre Zenon, infinitul său e un motor care generează paradoxuri cu diverse finalităţi: negarea posibilităţiii mişcării, ori constatarea insuficienţei explicaţiilor noastre raţionale pentru ceea ce percepem cu ajutorul simţurilor.

Diviziunea dihotomică a parcursului lui Ahile nu are sfârşit şi e un exemplu perfect de infinit potenţial. Dacă Ahile are de traversat un spaţiu de 1 metru, el trebuie să treacă peste intervalele de lungime descrescătoare 1/2, 1/4, 1/8, ..., $1/2^n$, ..., unde n ia o infinitate de valori. Dacă ţestoasa porneşte cu un minim avantaj, atunci în timp ce Ahile va parcuge această distanţă (fie ea cât de mică), ţestoasa va putea face un pas mic înainte şi dacă întrecerea continuă, atunci, cu acelaşi raţionament, Ahile nu va fi niciodată în stare să ajungă din urmă ţestoasa. Mai mult, Ahile nu e în stare să parcurgă nici măcar un metru, deoarece trebuie să treacă întîi de jumătate, apoi de jumătate din distanţa rămasă, adică un sfert din total şi aşa la nesfârşit. Dacă, în fiecare punct al parcursului, se consideră infinitatea intervalelor care trebuie acoperite înainte de a ajunge la acel punct, se poate conchide că Ahile nici măcar nu se mişcă.

Dacă privim legile mişcării şi formula simplă care leagă spaţiul parcurs s de timpul de parcurs t şi de viteza v, anume $s = tv$, e evident că Ahile, dacă aleargă cu viteză constantă v, depăşeşte ţestoasa care înaintează cu o viteză constantă v' mai mică decât v, chiar dacă ţestoasa are un avantaj iniţial s_0. Într-adevăr, există o

valoare a lui t pentru care tv, spațiul parcurs de Ahile, e mai mare decât $tv'+s_0$, adică decât spațiul parcurs de țestoasă.

O bază științifică pentru avantajul evident pe care îl va avea Ahile asupra țestoasei e dată tocmai de faptul că suma s a intervalelor infinite în care e împărțit parcursul e *finită* și egală exact cu 1. Dacă Ahile menține o viteză superioară unei anumite valori finite v, el va acoperi parcursul de un metru într-un timp mai mic decât $s/v = 1/v$. Dar nu va reuși să-l acopere dacă, în schimb, viteza sa ar scădea progresiv și ar tinde la 0, ca și lungimea intervalelor în care a fost împărțit spațiul. Paradoxul însă rămâne: cum face Ahile să traverseze în timp finit intervalele în număr infinit „decupate" din parcursul de un metru? Sau, mai general: cum se poate acoperi în timp limitat un număr nelimitat de operații? Argumentul bazat pe faptul că suma intervalelor parțiale e finită poate fi folosit pentru a răspunde la întrebarea *când* va depăși Ahile țestoasa. Dar rămâne de înțeles *cum* va reuși s-o facă, *cum* va traversa o succesiune infinită de intervale.[65] Pare perfect adevărat și, tot pe-atât, de neînțeles că Ahile, pentru a parcurge o linie dreaptă, trebuie să-i atingă *toate* punctele.

Referindu-se la paradoxul acesta, Aristotel raționa asupra timpului de parcurs (*Fizica*, 233 a 21-31; 239 b 5-240 a 18). În lipsa unei teorii a limitelor seriilor numerice, el argumenta, în primul rând, că despre o linie continuă putem spune că e infinită în două sensuri, *prin diviziune* sau *prin extreme*.[66] Doar în al doilea caz e timpul de parcurs infinit, în timp ce în primul caz, dacă viteza se menține deasupra unui prag finit, timpul de parcurs e limitat. Argumentația sa e bine orientată, dar încă lipsește concluzia care urmează din observația că suma infinității de intervale de parcurs e finită și egală cu 1.

Zenon dezvoltă al treilea său argument împotriva mișcării, despre săgeata în zbor, în următorii termeni: dacă admitem că un anumit lucru e în stare de repaus când ocupă un spațiu egal cu sine, sau în stare de mișcare dacă se mișcă numai instantaneu, atunci săgeata rămâne imobilă.[67] Aristotel (*Fizica*, 239 b 5-9) rezumă

argumentația ca și cum Zenon s-ar referi la un țesut atomic al spațiului și timpului, un continuu compus din infinit de multe elemente indivizibile: „Zenon face un paralogism. Astfel, zice el, dacă întotdeauna orice lucru este în repaus sau în mișcare, și este în repaus când se află într-un loc egal, iar lucrul purtat se află întotdeauna în clipă, trebuie să știm că săgeata în zbor este nemișcată. Dar aceasta este un neadevăr, pentru că timpul nu este compus din clipe indivizibile, cum nu e nici o altă mărime."

În consecință, Aristotel susține că săgeata în zbor rămâne nemișcată numai dacă se presupune că timpul e compus din clipe izolate. Într-adevăr, e imposibil ca săgeata să se miște *în clipa* indivizibilă, deoarece în acea clipă, mișcându-se, ar trebui să-și schimbe poziția, clipa devenind astfel divizibilă.[68]

Dar nu e limpede până la ce punct adopta Zenon ipoteza atomistă ca pe un dat necesar logicii paradoxului. Chiar presupunând că spațiul și timpul nu ar fi compuse, respectiv, din puncte și din clipe indivizibile, și că infinitul prin diviziune ar fi numai o potențialitate, mișcarea rămânea un fenomen de neînțeles. Faptul că săgeata se mișcă preț de o secundă presupune că aceeași săgeată zboară în prima jumătate de secundă, în prima jumătate din jumătatea a doua a secundei, și așa mai departe, indefinit. Alfred N. Whitehead observa că Zenon trebuie să fi fost cumva conștient că, dacă se consideră procesul în întregul său, atunci întrebarea „*ce anume* s-a mișcat" nu are un răspuns sigur. Orice lucru s-ar fi mișcat presupune că un alt lucru s-a mișcat pe un parcurs precedent și, cum nu reușim să parcurgem complet parcursul, suntem conduși să tragem concluzia că *nimic* nu s-a mișcat.[69]

O problemă implicită în paradoxul lui Ahile și al broaștei țestoase, dezbătută încă de la primele cercetări de analiză infinitezimală ale lui Leibniz și Newton, e dacă variabilele pot să-și atingă limitele. Newton (*Principia*, Cartea I, Secțiunea I, Lema I și Scolia la Lema XI) apăra eficacitatea metodei indivizibilelor, concepea cantități „născânde" și „disparente" și susținea că acele cantități și rapoarte de cantități care converg în timp finit și în mod continuu

către o relație de egalitate și, înainte de sfârșit, se apropie una de alta mai mult decât orice distanță fixată, *la urmă* devin egale. În faimosul său rechizitoriu polemic la adresa folosirii matematice a infinitezimalelor, George Berkeley afirma că științei matematicii îi lipsesc acele idei clare și distincte cu care mulți se așteaptă să explice, în fine, misterele religiei.[70]

Ulterior, un comentariu decisiv a venit din partea lui Russell care observa că paradoxurile despre mișcare ale lui Zenon sunt foarte departe de a fi simple sofisme. Astfel, în 1903, Russell scria în *Principles of Mathematics* (par. 327):[71]

> În lumea asta capricioasă, nimic nu e mai capricios decât faima postumă. Une dintre cele mai cunoscute victime ale lipsei de judecată a posterității e Zenon din Elea. În ciuda faptului că a inventat patru argumente, toate nemăsurat de subtile și de profunde, stupiditatea filozofilor de după el l-a declarat pe Zenon nu mai mult decât un poznaș ingenios, iar argumentele lui le-a considerat, pe toate, sofisme. După două mii de ani de continuă respingere, aceste sofisme au fost enunțate din nou și au constituit baza unei renașteri a matematicii înfăptuite de un profesor german care, cel mai probabil, nici măcar n-a visat că ar exista vreo legătură între el și Zenon. Eliminând complet toate infinitezimalele, Weierstrass a demonstrat în sfârșit că noi trăim într-o lume neschimbătoare și că săgeata, în fiecare clipă individuală a zborului ei, este cu adevărat în repaus.

Russell (*Principles*, paragraful 332) credea că argumentul săgeții enunța un fapt cu totul elementar, iar faptul de a-l fi neglijat ar fi menținut filozofia mișcării într-o mlaștină secole de-a rândul. Referirea sa la Karl Weierstrass e explicabilă: alături de Augustin-Louis Cauchy, Weierstrass a fost primul matematician care a pus limpede bazele analizei matematice fără infinitezimale, afirmând că o funcție $f(x)$ tinde la o limită L, pentru x care tinde la l, dacă, corespunzător unei valori pozitive date ε, oricât de mici, se poate găsi un număr pozitiv δ (care depinde de ε) în așa fel încât distanța dintre $f(x)$ și L e mai mică decât ε, atunci când distanța dintre x și l e mai mică decât δ. Dacă $L = 0$, atunci funcția f se aproximează cu 0 pentru x tinzând la l, dar în definiție se evită cu

bună știință să se spună că valoarea $f(x)$ devine infinitezimală. Dispare astfel ideea de afluire, de tendință dinamică a variabilei către limita sa, iar asta pur și simplu pentru că, în marginile trasate de ε și de δ, variabilele nici nu se mișcă, iau doar valorile care le sunt atribuite. Imobilitatea prevalează asupra mișcării.

Se poate atunci defini *viteza* unui corp în momentul t doar ca *limită* a raportului dintre spațiul parcurs și timpul de parcurgere atunci când variabila timp tinde la t. Această limită, un simplu număr, e *derivata* spațiului ca funcție de timpul de parcurgere la momentul t. Acesta era modul care permitea evitarea „cantităților disparente" concepute în primele dezvoltări ale calculului infinitezimal. Iată ce spune Russell în *Principles* (par. 447):

> Trebuie observat că, urmare a negării infinitezimalelor și a interpretării pur tehnice a derivatei unei funcții, suntem nevoiți să respingem cu totul noțiunea de *stare* de mișcare. Mișcarea constă *numai* în ocuparea de poziții diferite la momente diferite de timp, ocupare supusă continuității [...] Nu există trecere dintr-un loc în altul, nici nu există moment consecutiv ori poziție consecutivă, nu există nimic similar vitezei, cu excepția accepțiunii unui număr real, limită a unei anumite serii de rapoarte [dintre spațiu și timpul de parcurs]. Respingerea vitezei și a accelerației ca fapte fizice (și deci ca proprietăți care aparțin *în fiecare clipă* unui punct în mișcare, și nu doar ca numere reale care exprimă limitele unor anumite rapoarte) implică, după cum vom vedea, unele dificultăți în enunțarea legilor mișcării; dar reforma introdusă de Weierstrass în calculul infinitezimal a făcut imperios necesară această respingere.

Așadar, numerele raționale și iraționale, gândite ca limite de variabile, moșteneau natura efectivă și reală a unor concepte fizice precum viteza și accelerația. În aceste numere se puteau recunoaște entități atomice în corespondență biunivocă cu punctele dreptei. Mișcarea putea fi interpretată folosind numai coordonatele spațiului-timp și deci prin poziții succesive, fixe și punctuale. „Mecanica poate explica mișcarea numai prin intermediul imobilității."[72]

Doar în numere era de găsit realitatea continuului spațio-temporal, aceasta era concluzia importantă. Iar numerele care îndeplineau această sarcină puteau fi și raționale, și iraționale. Mai mult, după Weierstrass, apariția numerelor reale (raționale + iraționale) ar fi fost efectul unei creații libere a matematicianului, chiar dacă indusă de proprietăți obiective ale corpului numeric. Se poate imagina acord mai deplin între gând și natură, între libertate și eficiență?

Whitehead arăta că lumea obiectivă se exprimă întotdeauna sub un dublu aspect: potențialitate de diviziune, pe de o parte, și raporturi mutuale și gradațiuni pe care le face să apară procesul de diviziune, în fiecare clipă, ca realități efective. Lumea *percepută* apare întotdeauna în potențialitatea sa indefinită de diviziune, ea e divizibilă, dar nu e divizată în act, în timp ce entitățile reale, atomice, acelea care definesc *realitas objectiva*, trăiesc într-un sistem de relații matematice. În sprijinul observațiilor sale, Whitehead relua tezele lui William James care, referindu-se la Zenon, distingea natura unei lumi percepute nemijlocit sau în act de divizibilitatea indefinită imaginată de rațiunea noastră: „Ori experiența e lipsită de conținuturi și de schimbări, ori constă din porțiuni de conținut și de schimbare perceptibile. Cunoașterea realității se dezvoltă literalmente prin muguri sau picături de percepție. Putem să le divizăm în părți cu ajutorul intelectului și al reflecției, dar ca date nemijlocite ele se prezintă în întregime ori deloc".[73]

Whitehead observa că „continuitatea se referă la ceea ce e potențial, în timp ce actualitatea e disperat de atomică"[74], dar continuitatea geometrică era deja concepută concret, grație teoriilor lui Cantor și Dedekind, ca un domeniu de numere actuale. Proiectul aritmetizării analizei *atomizase* deja extensia continuă. În teoria continuului numeric, actualitatea se sprijină pe entități atomice care formează un sistem de diviziuni reale, definite de evenimente instantanee în relație cu alte evenimente plasate în anumite puncte ale continuului. Între numere și puncte se stabilește

în mod axiomatic o corespondență biunivocă și, prin intermediul numerelor, punctele din spațiu și momentele de timp câștigă un nou tip de realitate. După cum scria Russell (*Principles*, par. 326):

> Mărginindu-ne la continuul aritmetic, intrăm în conflict, în mod diferit, cu prejudecățile comune. În legătură cu continuul aritmetic, Poincaré observa cu îndreptățire: „Continuul așa conceput nu e altceva decât o colecție de indivizi aranjați într-o anumită ordine, în număr infinit, e drept, dar exteriori unul față de celălalt. Aceasta nu e concepția uzuală, în care se presupune că între elementele continuului există un fel de legătură intimă care face din ele un tot în care punctul nu e anterior liniei, ci linia e anterioară punctului. Din faimoasa formulă conform căreia continuul e unitate în multiplicitate, mai rămâne doar multiplicitatea, unitatea a dispărut".[75]

Pentru Poincaré, noțiunea matematică de continuu e un produs al minții omenești, dar există un fel de experiment fizic care favorizează apariția acestui produs și-i face aproape necesară creația. Proprietatea de densitate a continuului apare drept consecință a unei simple comparații între diferite măsuri, ca de exemplu, în cazul a trei greutăți A, B, și C. E posibil să avem $A = B$ și $B = C$ datorită imposibilității experimentale de a distinge A de B și B de C, dar să avem și $A < C$, tot pe cale experimentală. Am fi atunci obligați să credem că *în realitate*, contrar indicațiilor experimentului, A e diferit de B și B e diferit de C și că alte greutăți se interpun între A și B, ca și între B și C. O concluzie impusă de principiul noncontradicției și care nu depinde de precizia instrumentelor de măsură pentru greutăți.

În mod analog, pare necesar să impunem așa-zisa completitudine a continuului, adică inserarea în ansamblul său a tuturor punctelor ale căror coordonate nu sunt numere raționale. Într-adevăr, există curbe care se intersectează în puncte ale căror coordonate *nu* sunt numere raționale. Un exemplu e punctul de intersecție dintre diagonala unui pătrat și cercul înscris. Dacă presupunem că există numai puncte cu coordonate raționale, atunci nu mai putem susține că acel punct există cu adevărat. Dacă desenăm în

planul cartezian un cerc cu centrul în origine şi cu raza egală cu diagonala unui pătrat de latură 1, acesta intersectează axa absciselor într-un punct a cărui distanţă la origine e măsurată de numărul irațional $\sqrt{2}$[76]. Pe de altă parte, o exigenţă de neînlăturat a minţii noastre ne cere să considerăm punctul însuşi ca pe o entitate reală. Mintea noastră nu îngăduie lacune în continuu, iar modul cel mai eficient de a le evita e să asociem coordonatelor *punctelor* de intersecţie dintre linii *numere* care să aibă aceeaşi *realitate* ca şi numerele întregi şi fracţiile. Numărul conferă realitate punctului – cu condiţia să fie el însuşi o entitate reală.

După cum explica Russell, „infinitatea şi continuitatea intervin amândouă în aritmetica pură" (*Principles*, par. 435). Tocmai această cucerire a intelectului a fost remediul la dificultăţile pe care Zenon le ridicase în legătură cu natura mişcării şi compoziţia continuului. Soluţia modernă a paradoxului lui Ahile s-a bazat pe presupunerea că e real sau posibil exact ceea ce Zenon considera paradoxal, adică, în comentariul lui Russell, absenţa unei stări de mişcare: un sacrificiu care salva un dat la care nu se putea renunţa, anume existenţa actuală a lucrurilor. O entitate actuală, nota Whitehead, nu se mişcă: ea este acolo unde este şi este ceea ce este.[77]

Russell susţinea că noţiunea de *stare* de mişcare nu e fundamentată, deoarece mişcarea se compune din poziţii atomice ocupate în momente bine determinate, şi unele, şi celelalte măsurabile în termeni de numere reale, corespunzătoare punctelor unei drepte. Aristotel (*Fizica*, 234 a 24 şi urm.) demonstrase că nimic nu se poate mişca în clipă (*nŷn*) şi că, din acest motiv, timpul nu e compus din clipe. Russell răspundea că acest lucru e adevărat, nimic nu se mişcă în clipă, şi aste e compatibil cu o teorie coerentă a continuului aritmetic dotat cu metrica euclidiană, aşa cum fusese el elaborat de Weierstrass, Dedekind şi Cantor. Doar aşa se putea garanta realitatea a ceea ce se schimbă şi se miscă. Paradoxalul devenea real.

E totuşi ceva forţat în comentariile lui Russell, evident în faptul că era vorba despre rezolvarea unui fel de conflict dintre rigoarea matematică şi concepţiile comune. Dar, la fel ca în alte teorii matematice, concepţiile comune aveau să cedeze în faţa unei viziuni impregnate de evidenţa formulelor. Matematica a fost dintotdeauna o artă a paradoxului, iar formulele sale au suscitat adesea o reacţie de neîncredere chiar din partea savanţilor care le-au descoperit ori inventat. Dar matematica e şi arta construcţiei de simulări şi modele fidele, pe cât posibil, pentru concepţiile noastre comune, cu ajutorul unor definiţii şi teorii capabile să ne facă să recunoaştem ceea ce ne aşteptăm să recunoaştem. Acelei aproape imperceptibile forţări din comentariile lui Russell i-a urmat stânjeneala explicită din comentariul lui Hilbert şi Bernays la primul paradox al lui Zenon asupra mişcării, comentariu reluat ulterior şi de Stephen Kleene:

> Există o soluţie mult mai radicală a paradoxului. Aceasta constă în a accepta că nu suntem nicicum obligaţi să credem că reprezentarea matematică a mişcării în termeni de spaţiu şi timp e semnificativă din punct de vedere fizic pentru intervale de spaţiu şi de timp infinit de mici; mai degrabă, avem toate motivele să presupunem că acel model matematic extrapolează faptele dintr-un anumit domeniu al experienţei, anume mişcările care se produc la un ordin de mărime accesibil – până în acest moment – observaţiei noastre, în sensul unei simple construcţii conceptuale, una analoagă modului în care mecanica continuului procedează prin extrapolare când presupune că spaţiul ar fi umplut, în mod continuu, cu materie. [...] Situaţia e similară în toate cazurile în care se crede că e posibil să se pună în evidenţă direct un tip de infinit [actual] ca dat al experienţei ori al percepţiei. [...] Un examen mai atent ne arată atunci că, de fapt, nu ne e dată nici un fel de infinitate, ci ea e interpolată ori extrapolată prin intermediul unui procedeu intelectual.[78]

Dar altă cale nu exista, singura era aceea a extrapolării, a completării faptelor experienţei cu un model matematic al continuului a cărei origine stă, cum observa Hermann Weyl, într-o pură construcţie simbolică. Aristotel remarcase (*Fizica*, 263 a 25-30) că

dacă se împarte repetat continuul în două jumătăţi, atunci nici linia, nici mişcarea nu pot rezulta continue. Mişcarea, preciza el, e o proprietate a unui continuu, iar într-un continuu sunt, e drept, infinite jumătăţi, dar numai în potenţialitate, nu în act. În termeni mai simpli, totul s-ar putea rezuma după cum urmează: e absurd să considerăm că lucrurile care se mişcă s-ar mişca numărând. Dar atunci devenea limpede că mişcarea şi continuitatea dreptei nu-şi puteau găsi explicaţia folosind numai numerele naturale cu care se numără lucrurile unul câte unul. Se simţea deci nevoia unei teorii mai generale a numărului şi a unei extinderi a ideii de actualitate ori de entelehie la acelea care, la sfârşitul secolului XIX, aveau să fie numite, şi nu întâmplător, *numere reale.*

9
Paradoxurile pluralității

Teoriile moderne ale continuului matematic au încercat să clarifice şi să desluşească şi paradoxurile lui Zenon despre conceptul de pluralitate. Potrivit surselor, paradoxul despre pluralitate se referea la demonstraţia faptului că entitatea care nu are mărime nu există, şi că în orice lucru înzestrat cu mărime şi lăţime părţile sunt cumva distanţate una de cealaltă (29 B 1 DK). Părţile din care se compune o pluralitate, având un număr infinit de elemente, pot avea mărime pozitivă sau nulă. În primul caz, dacă părţile au aceeaşi mărime, fie şi foarte mică, se obţine totuşi o mărime infinită; în al doilea caz, în schimb, se obţine o lungime nulă, pentru că *o sumă, finită sau infinită, de lungimi de dimensiune nulă e nulă*. O sumă infinită de puncte fără nici o dimensiune trebuie să producă o mărime de dimensiune egală cu zero. Dacă împărţind la infinit o linie continuă s-ar ajunge la elemente indivizibile, paradoxul ar fi: dacă elementele indivizibile au lungime egală strict pozitivă, lungimea liniei e infinită; dacă acele elemente au fiecare lungime nulă, atunci puse laolaltă produc tot o lungime nulă. „Astfel, dacă [entităţile] sunt multe, ele trebuie să fie numaidecât mici şi mari: mici, până a nu mai avea mărime, mari, până a fi nemărginite“ (29 B 1 DK).

În polemica sa împotriva doctrinei lui Parmenide, Aristotel foloseşte teza lui Zenon potrivit căreia un punct sau o unitate, fiind indivizibil(ă) şi fără mărime, nu produce nici un efect, indiferent

că e adăugat sau extras, fiind astfel o non-entitate, un nimic pur: „În plus, dacă Unul în sine este indivizibil, conform cu concepția lui Zenon nu ar mai exista nimic. (Căci lucrul pe care nici prin adaos, nici prin scoatere el nu-l poate face nici mai mare, nici mai mic, el îl consideră inexistent, fiind limpede că, la el, ceea-ce-este e mărime" (*Metafizica*, 1001 b 7; 29 A 21 DK).

Așadar, pentru Aristotel, Zenon susținea că dacă ceva care e adăugat nu produce creștere, atunci acel ceva e *nimic*, aceeași concluzie subzistând pentru ceva care, extras, nu duce la scădere. E o observație importantă care se poate lega de ideea platoniciană de realitate. Pentru Platon, realitatea se baza pe *dýnamis*, capacitatea de a produce un efect de orice fel, în particular o creștere sau o scădere. În centrul acestei concepții stătea analogia dintre dezvoltarea progresiilor numerice și mișcarea de augmentare pe care prin natura sa o avea *phýsis*. În mod analog, în raționamentul lui Zenon, *realitatea unui lucru pare să depindă de capacitatea lui de a produce creștere sau diminuare*.

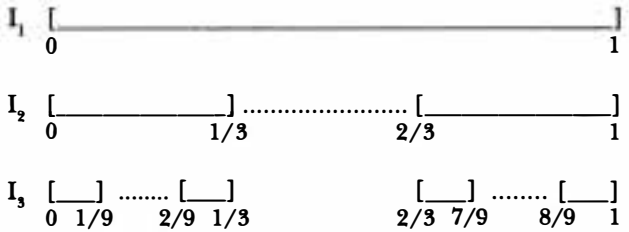
Aristotel pare să accepte partea din raționament care-l respinge pe Parmenide, dar se declară împotriva tezei că un element de lungime nulă e în mod necesar ireal: „este posibil să existe ceva indivizibil" (*Metafizica*, 1001 b 14). Într-adevăr, Aristotel admite existența punctului geometric, pe care-l numește *stigmé*, termen care trimite la un fel de perforare, și deci de efectivă direcționare în spațiu. Euclid, Arhimede și unii autori de după ei folosesc în schimb termenul *semeîon*.[79] Proclus găsea în puncte conotația de „materialitate inteligibilă", explicând că punctul e materializat „pentru că apare în ascunzișurile imaginației" (*Comentariu la Cartea I a „Elementelor" lui Euclid*, 96). Inteligența dianoetică atribuie unității abstracte o poziție în spațiu, o comută în punct, găsindu-i în imaginație (*phantasía*) o figură adecvată, chiar dacă obligată la o existență materială și neautentică. În *Solilocvii*, și Augustin avea să observe diferența dintre o figură adevărată, obiect al inteligenței, și figura creată de imaginație, numită de greci *phantasía* sau *phántasma*.

Chiar dacă atribuie realitate punctului geometric, Aristotel îi neagă existența ca ceva material, iar când se referă la teoriile atomiste, o face în general pentru a le respinge. Punctul poate fi definit ca atomic pentru că e indivizibil, dar nu pentru că ar fi asimilabil cu un atom corporal: „nici unul dintre corpuri nu este un punct" (*Despre cer*, 296 a 17-18). Ceea ce totuși nu înseamnă că, pentru Aristotel, punctele, ca și orice alte entități matematice, ar avea o realitate separată de aceea sensibilă: „La fel stau lucrurile și cu geometria: chiar dacă se întâmplă în context ca lucrurile ei să fie senzoriale, dar fiindcă ele nu sunt luate ca senzoriale, științele matematice nu au ca obiect lucrurile senzoriale și nici nu au ca obiect alte lucruri autonome și separate în raport cu acestea" (*Metafizica*, 1078 1 1-5).

Punctul se distinge de unitate (*monás*) doar prin poziția sa în spațiu. Pentru Aristotel, *punctul e o unitate dotată cu poziție*, dar linia nu e formată din puncte, nu există continuitate între două puncte și un punct nu e parte a unei linii (*Despre generare și nimicire*, 317 a 10; *Fizica*, 215 b 19-20), la fel cum timpul nu e compus din clipe. Mai degrabă linia e generată de punct prin intermediul unei mișcări (*Despre suflet*, 409 a 4), iar atunci realitatea punctului stă din nou în capacitatea sa de a produce o mărime printr-un fel de prelungire ori de creștere.

Ce înseamnă că o linie nu e *făcută* din puncte, ori *compusă* din puncte? Argumentul lui Zenon se sprijină pe o unică idee intuitivă de compunere, de adunare sau scădere de elemente, dar argumentația se complică dacă se ține cont de diversele semnificații pe care teorii mai noi le atribuie unor termeni ca sumă, dimensiune, corp sau mărime. Mărimea unei mulțimi e măsurată de dimensiunea sa, ori de cardinalitate (zisă și putere)? Dimensiunea și cardinalitatea ar putea să nu depindă una de alta: se pot concepe mulțimi liniare de puncte de lungime nulă, dar de puterea continuului. Mulțimea *ternară* a lui Cantor are exact aceste caracteristici: se compune din toate numerele cuprinse între 0 și 1 care au o reprezentare în baza 3 în care nu apare niciodată cifra 1 (deci

se reprezintă numai cu 0 şi 2). Geometric, mulţimea se obţine considerând intervalul [0, 1] şi eliminând repetat prima şi ultima sa treime.



Se obţine astfel un şir infinit de submulţimi ale mulţimii numerelor cuprinse între 0 şi 1, fiecare dintre ele fiind o reuniune de intervale închise şi disjuncte. Mulţimea ternară a lui Cantor, care e intersecţia tuturor acestor mulţimi, *nu e numărabilă*, pentru că e în corespondenţă bijectivă cu mulţimea numerelor reale mai mari sau egale cu 0 şi mai mici decât 1, totuşi e *discontinuă*, adică peste tot întreruptă de salturi (mulţimea golurilor e peste tot densă pentru că între două lacune, oricât de apropiate, există întotdeauna o altă lacună), iar lungimea sa e nulă. Se obţine astfel o mulţime de puncte din intervalul [0, 1] care are puterea continuului şi lungime egală cu zero.

E totuşi posibil ca obiecte de dimensiune nulă, cum sunt punctele unei linii, să poată forma o mulţime, linia însăşi, de dimensiune mai mare, 1 în acest caz, iar metrica euclidiană definită coerent pe acest continuu numeric poate atribui o lungime superioară lui zero unor mulţimi de puncte individuale de lungime nulă. În acest mod, unui interval al dreptei reale de capete *A* şi *B* i se asociază o lungime egală cu *b-a*, unde *a* şi *b* sunt numerele reale corespunzătoare punctelor *A* şi *B*. Dacă *a* e diferit de *b*, această lungime e un număr diferit de zero, chiar dacă segmentul de dreaptă dintre *A* şi *B* e compus din puncte fără dimensiune. Teoria metrică a continuului numeric, presupusă a fi coerentă, are

printre consecințe respingerea argumentelor care susțin paradoxul lui Zenon despre pluralitate.

Chiar dacă presupunem că universul e format din corpuri contigue, observa Aristotel (*Despre generare și nimicire*, 325 a), dacă universul e în întregime divizibil, atunci nu există nici unitate, nici multiplicitate, totul e vid și, în plus, nu se știe cum s-ar putea susține că există bucăți de extensiune indivizibile, acestea fiind pure ficțiuni. Riscul acesta de a ne confrunta cu vidul ficțiunii sau cu inconsistența convenției explică și vechiul motiv de atracție pentru numere ca fundament al realului. Începând cu cele mai vechi teorii atomiste, pe care nici Aristotel nu le accepta, calea de evitare a paradoxurilor lui Zenon s-a îndreptat către un posibil element de realitate, care putea consta în numere și în rapoartele lor, în capacitatea lor de a măsura figurile geometrice, relațiile de echivalență și de asemănare. Tensiunea problematică dintre aritmetică și geometrie, dintre numere și puncte de pe dreaptă, dezvăluie întreaga dificultate intrinsecă acestui program. Intenția tezelor atomiste ale lui Democrit și Leucip era probabil căutarea actualității în dauna indeterminării unei regresii ori a unei progresii *in infinitum*. Democrit respingea calitățile obiectelor pentru că le considera fruct al obișnuinței ori convenții: „Culoarea se supune convenției, dulcele se supune convenției, amarul se supune convenției, în timp ce reale (*etehêi*) sunt doar atomii și golul" (68 B 125 DK). Cu toate acestea, Democrit susținea și că „nu cunoaștem nimic real: de fapt, adevărul sălășluiește în adânc" (68 B 117 DK).

Mai târziu, Lucrețiu a folosit același argument al dihotomiei lui Zenon pentru a demonstra că existența atomilor e unica alternativă la completa disoluție a realului (*Poemul naturii*, I, 615-27):

> Dacă acestea, apoi, nu ar fi cât de mici cu putință, / Corpuri micuțe de tot ar cuprinde părți nenumărate,/ Căci jumătățile lor ar avea jumătăți fiecare / Și s-ar urma cu aceasta sfârșit fără-a fi vreodată, / Ce osebiri ar mai fi între ceea ce-i mic și ce-i Totul? / Sigur nici una, căcioricât de fără sfârșit este lumea, / Înseși acele ce-s mici deopotrivă avea-vor și ele / Alcătuire din părți care sunt nesfârșite la număr; / Cum e-mpotrivă gândirea cea dreaptă

[*ratio vera*] şi mintea nu poate / Asta s-o creadă, siliţi vom primi că se află şi corpuri / Neprevăzute cu părţi şi-n micime de-asemeni pe treapta / Cea mai din urmă, şi-odată ce sunt aşadar în fiinţă, / Mărturisi-ve-I şi tu că, solide, au veşnică viaţă.*

În ciuda unei opinii foarte răspândite, matematica *nu* se naşte ca abstracţiune pură, ca model abstract al realităţii fizice. Principiul realităţii fusese întâi încredinţat unui fel de atomism numeric, împotriva irealului evocat de diviziunea nelimitată a continuului. Numerele, rapoartele şi algoritmii se nasc prin opoziţie cu *ápeiron*, cu infinitul mare ca şi cu infinitul mic. Ceea ce e evident în cazul pitagoreicilor: numerele lor, concepute ca şiruri ordonate de puncte distincte din spaţiu par să răspundă tocmai scopului de a fonda un univers de entităţi existente în act şi efectiv; nu o abstracţiune, cum ar putea părea, ci, dimpotrivă, o realizare eficace a substanţei lucrurilor.

După Aristotel (*Metafizica*, 1080 b 16 şi 1036 b 8; 58 B 25 DK), pitagoreicii susţineau că din număr sunt compuse substanţele sensibile, din număr e făcut întreg universul, iar figuri geometrice ca cercul şi triunghiul trebuie considerate în acelaşi fel ca oasele şi carnea omului, ori ca bronzul şi piatra unei statui. Şi Platon, aminteşte Aristotel (*Metafizica*, 987 b 22; 58 B 13 DK), credea că numerele sunt cauza substanţei lucrurilor, fiind chiar pe picior de egalitate cu lucrurile însele. Leucip şi Democrit ar fi mers ulterior pe această linie şi, într-adevăr, Aristotel notează că atomiştii credeau, la fel ca şi pitagoreicii, că „orice lucru care există în univers e făcut din numere ori se dezvoltă din numere" (*Despre cer*, 303 a 8-9). Elementul imanent, constitutiv (*stoicheîon*) al numerelor era unul, aşa cum pentru linie era punctul. Unul şi punctul sunt mici, simple, indivizibile, sunt prezente pretutindeni, împrejurare care i-a condus pe filozofi să le considere ca principii (*Metafizica*, 1014 b).

* Lucreţiu, *Poemul naturii*, trad. de D. Murăraşu, Editura Minerva, Bucureşti, 1981. (*N. t.*)

Acest program al pitagoreicilor şi al atomiştilor a fost perfecţionat de matematica secolului XIX, atunci când Weierstrass, Cantor, Dedekind şi alţii au dezvoltat o teorie coerentă a continuului numeric, definit de un corp care include numerele raţionale şi iraţionale. Putem acum înţelege cât a fost de important să stabilim că numerele iraţionale *există* şi au acelaşi statut ontologic cu numerele întregi naturale.

10

Limită şi nelimitat. Incomensurabilitate şi algoritmi

De ce au numerele întregi şi algoritmii, spre deosebire de numerele iraţionale şi de conceptul de continuu, o realitate indiscutabilă? Dacă urmăm criteriul platonician pentru a defini ceea ce este real şi ceea ce nu este real, trebuie să reluăm pasajul din *Philebos* (16 c) în care se afirmă, în baza unei înţelepciuni moştenite de la cei vechi, aflaţi mai aproape de zei, că „cele considerate a exista de-a pururea constau din unu şi din multiplicitate şi că ele posedă limita şi nelimitatul". Aceasta era o viziune nu foarte depărtată de cea a lui Parmenide, care afirma, după spusele lui Proclus, că „ceea ce există este unu doar în ce priveşte conceptul (*eîdos*), şi e multiplu în ce priveşte evidenţa experienţei senzoriale (*enágeia*)" (29 A 15 DK).

Pentru Platon, numărul întreg natural, *arithmós*, e exact ceea ce stă în mijloc (*metaxý*) între infinit şi unu (*Philebos*, 16 d-e), între limitat şi nelimitat, ceea ce mediază între unul şi celălalt. Cu algoritmii se putea calcula, adică se puteau *produce* numere şi rapoarte de numere, iar această producţie se realiza între doi poli opuşi, anume unul, conceput ca *lógos* seminal, şi nelimitatul, creşterea indefinită de numere sau de figuri geometrice la diverse scări. Numerele şi rapoartele erau generate din unitate în şiruri care puteau fi prelungite la infinit, prin operaţii succesive de diviziune,[80] formând un ţesut intermediar dens care era *realitatea* ori o reprezentare adecvată a sa. Pentru a aproxima entităţile pe care noi le

numim acum numere iraționale, existau deja șirurile de fracții care converg la un punct al dreptei reale – pe care Cantor le numea *șiruri fundamentale*. Dar pentru greci, realitatea nu consta din ceea ce Dedekind avea să numească „tăietură" a corpului numerelor raționale, nici din numărul cu infinite cifre zecimale pe care noi îl notăm, de exemplu, cu simbolul $\sqrt{2}$. Asta era o lacună de neexprimat, nu o entitate căreia să i se poată atribui existență în act. Lipsea deci o idee precisă de aproximare numerică: cum nu exista o entitate de aproximat, nici nu se putea concepe o distanță între fracție și limita șirului. Realitatea rapoartelor de mărimi geometrice incomensurabile, cum erau diagonala și latura pătratului, stătea numai în rapoartele dintre întregi, în *lógoi* calculați efectiv și în legea care permitea calcul lor. Ceea ce totuși nu îi împiedica, în anumite cazuri, să asocieze unei linii geometrice un număr întreg care s-o măsoare aproximativ, chiar și atunci când linia era, de exemplu, diagonala unui pătrat de latură 1. Pentru Platon (*Republica*, 546 c) *diagonala rațională* a lui 5, adică $7 = \sqrt{40}$ putea fi comparată cu $\sqrt{50}$, adică cu lungimea exactă a diagonalei pătratului de latură 5. Numărul $7 = \sqrt{40}$ e un număr întreg, în timp ce $\sqrt{50}$, care e număr irațional, era o lacună pentru un grec, o entitate nereprezentabilă cu ajutorul numerelor întregi.

Discursul lui Platon se baza pe teorema lui Pitagora aplicată unui triunghi dreptunghic cu ambele laturi de lungime 5. Cum suma pătratelor pe laturi e egală cu pătratul pe ipotenuză, din egalitatea $5^2+5^2 = 50$ se deduce că ipotenuza are lungimea $\sqrt{50}$. Rădăcina pătrată a lui 49 e o aproximare pentru $\sqrt{50}$, și are avantajul de a fi un număr întreg natural, anume 7, și nu un număr irațional cum e $\sqrt{50}$. Construcțiile altarelor vedice folosind corzi și țăruși, descrise în *Śulvasūtra*, utilizează o aproximare analoagă, anume $5^2+5^2 \approx 49$.[81] De altfel, măsura lungimii oricărui corp nu e exactă și constă, de regulă, citim în text, din „mai puțin și mai mult".[82]

Procesul de aproximare, atins numai în treacăt în procedurile numerice ale matematicii antice, avea să devină ulterior o piatră unghiulară a întregii gândiri matematice. Pentru că se știa din

timpuri imemoriale (aluzii limpezi se află, de exemplu, în tratatele vedice) că mărimile nu pot fi măsurate exact, ci doar cu aproximații prin exces și prin lipsă.

Problema aproximării numerelor iraționale nu privea numai aspectele aplicative ale calculului. Tehnicile cu care se măsurau gradele de aproximare au devenit chiar tehnici ale gândirii matematice. Într-adevăr, definiția euclidiană a raportului datorează mult tehnicilor precedente de aproximare prin lipsă și adaos; definiția limitei dată de Weierstrass își datorează logica existenței algoritmilor numerici (apar chiar aceleași simboluri ε și δ care înainte notau *eroarea* aproximării); formulele analitice folosite pentru aproximarea unei funcții servesc la definirea unor concepte generale, cum e stabilitatea unui sistem de calcul; o teoremă demonstrată în 1844 de Joseph Liouville (vezi mai jos, pp. 134-135) stabilește gradul de aproximare care poate fi atins în cursul aproximării rădăcinilor unei ecuații algebrice și permite chiar cuantificarea unui fenomen critic din calculul automat, anume viteza de *creștere* a numerelor calculate.

Putem avansa unele conjecturi despre instrumentele care au permis descoperirea, înainte de Euclid, a existenței mărimilor geometrice incomensurabile. Să observăm că erau posibile mai multe *demonstrații* pentru incomensurabilitatea diagonalei și a laturii pătratului și mai multe *proceduri* pentru calculul aaproximativ al lui $\sqrt{2}$. În toate găsim, invariabil, tema creșterii sau descreșterii mărimilor. Într-una dintre demonstrațiile posibile intervine chiar criteriul dihotomic al lui Zenon, deși Aristotel (*Analitica primă*, 65 b 16-21) pare să pună la îndoială posibilitatea unei asemenea apropieri între incomensurabilitate și tehnicile de generare a paradoxurilor. Metoda dihotomică ducea totuși la construcția unui șir nemărginit de pătrate, repetându-se astfel schema dintotdeauna: de la un nucleu inițial, format dintr-o figură geometrică, se construiesc infinit de multe altele, asemenea primeia. Presupunând, prin absurd, că diagonala și latura ar fi comensurabile, se construiește un șir de pătrate la scară descrescătoare, prin înjumătățiri

succesive, diagonalei şi laturii asociindu-se de fiecare dată, drept consecinţă a ipotezei iniţiale de comensurabilitate, un număr întreg pozitiv. Segmentele liniare devin din ce în ce mai mici, la fel şi numerele corespunzătoare. Dar şirul de diagonale şi laturi e nemărginit, în timp ce şirul descrescător de numere nu poate fi nemărginit, de unde contradicţia.[83]

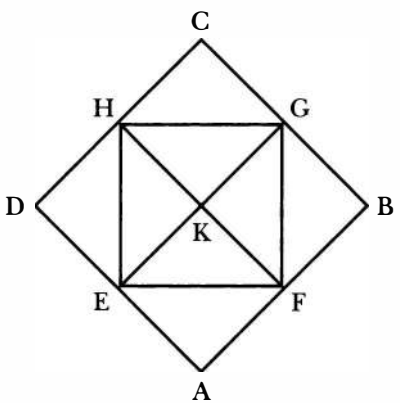


Figura 5

Dacă presupunem, prin absurd (figura 5) că diagonala EG a pătratului EFGH e comensurabilă cu latura EF (pe figură, E, F, G şi H sunt mijloacele laturilor pătratului ABCD), atunci raportul EG:EF se poate exprima ca un raport de numere întregi d şi s (Euclid). Dar pătratul ABCD şi pătratul EFGH reprezintă, respectiv, d^2 şi s^2 care sunt, cum se vede pe figură, unul dublul celuilalt. Rezultă că d^2 e un număr par şi, cum pătratul unui număr impar e impar, şi AB trebuie să fie par. Atunci jumătatea sa e un număr întreg. Dar şi EF e un număr întreg, deci raportul EF:AF e unul de numere întregi. Am construit deci un pătrat EKFA a cărui latură e jumătatea laturii pătratului ABCD, astfel încât diagonala şi latura sa reprezintă numere întregi. Construcţia se poate repeta la infinit, generând treptat pătrate din ce în ce mai mici, cu latura, la fiecare

pas, jumătate din cea de la pasul precedent, dar mereu măsurată de un număr întreg. Numerele devin din ce în ce mai mici, la fel şi pătratele; dar în timp ce pătratele, care sunt mărimi continue, se pot micşora indefinit, numerele întregi nu pot scădea sub 1. Descreşterea indefinită a numerelor e incompatibilă cu înjumătăţirea indefinită a segmentelor, deoarece procesul trebuie să se termine în mod necesar cu un segment unitar sau măsurat de un număr impar. Metoda dihotomică oferă deci un exemplu perfect pentru acel tip de incompatibilitate dintre numere şi figuri geometrice care avea să ducă la descoperirea mărimilor incomensurabile.

Metoda dihotomică nu era singurul instrument de studiu al incomensurabilităţii. O altă demonstraţie, înrudită cu cea dinainte, care ar putea sta la originea cercetării incomensurabilităţii, era strâns legată de un algoritm care permitea aproximarea, cu precizia cerută, a raportului dintre diagonala şi latura unui pătrat. Cele două procedee, demonstraţie şi algoritm, sunt ca două feţe ale aceleiaşi monede, una e inversul celeilalte şi ambele pot fi ilustrate tot prin construcţia unui număr infinit de pătrate. Baza procedeului demonstrativ e *antanairesis* sau *anthyphairesis*, procesul scăderilor succesive cunoscut drept „algoritmul lui Euclid", tehnica folosită pentru găsirea celui mai mare divizor comun al două mărimi, calculând câturi şi resturi. Dat un pătrat ABCD (figura 6), pe diagonala BD = d se marchează un segment BE egal cu latura l a pătratului. Această operaţiune nu e altceva decât împărţirea lui d la l, cu rezultatul 1 şi cu un rest egal cu ED care e mai mic decât jumătatea lui d. Segmentul ED devine latura l' a unui pătrat mai mic decât cel iniţial, apoi din pătratul de latură l' şi diagonală $d' = \mathrm{DF} = l$ se construieşte, cu acelaşi procedeu, un al treilea pătrat. Construcţia poate fi repetată indefinit, în orice pătrat Q din şir diagonala d fiind egală cu suma dintra latura lui Q şi latura pătratului succesiv mai mic Q', adică $d = l+l'$, în timp ce latura l e egală cu suma dintre diagonala şi latura lui Q', adică $l = d'+l'$.[84]

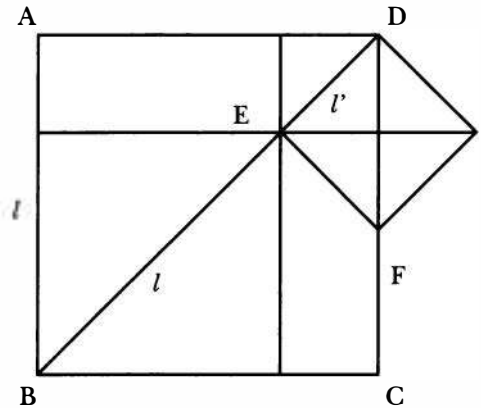


Figura 6

Raționamentul se continuă prin absurd. Dacă diagonala BD și latura BC din pătratul mai mare sunt comensurabile, atunci ambele sunt multipli exacți ai unei aceleiași unități de măsură U. Rezultă că și diferențele BD-BC = EF, DC-FC = DC-EF = DF sunt ambele multipli ale aceleiași unități de măsură U (ca diferențe de multipli ai lui U). Așadar latura și diagonala pătratului mai mic sunt comensurabile și multipli exacți ai lui U. Construind pătrate din ce în ce mai mici, fiecare diagonală și fiecare latură vor fi multipli de U, dar acești multipli sunt din ce în ce mai mici: dacă, de exemplu, BC = 40U, atunci EF ar fi maximum 39U. Fiecare latură ar fi egală cu *n*U cu *n* egal cu un număr întreg pozitiv din ce în ce mai mic. Dar *n* nu poate scădea sub 1, în timp ce pătratele se pot micșora indefinit. Concluzia e că diagonala și latura unui pătrat *nu* sunt comensurabile (*Elementele*, X, 2).[85]

Ceea ce trebuie observat e că parcursul invers, la scară crescătoare, de la un pătrat mai mic la unul mai mare, se realizează cu o transformare care e exact inversa precedentei: cele două transformări sunt definite de două matrice cu câte două linii și două coloane, una fiind inversa celeilalte.[86] Cu șirul de laturi *l* și

diagonale *d* care cresc progresiv se construiesc rapoartele *d*:*l* care-l aproximează pe $\sqrt{2}$. Se obține un *algoritm*, un proces de calcul cu numere raționale (fracțiile *d*/*l*) care, pe măsură ce crește *l*, deci cu cât scade 1/*l*, se apropie din ce în ce mai mult de rădăcina pătrată a lui 2 (fără să ajungă niciodată la valoarea exactă). E același algoritm al numerelor laterale și diagonale la care se referă Theon din Smirna (secolul I-II d.Cr.) în a sa *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. O demonstrație în care e evidentă prezența simultană a lui „mare" și „mic" ca denotare platoniciană al lui *ápeiron*: *numerele d și l devin mereu mai mari în timp ce unitatea de măsură* 1/*l devine mereu mai mică*. Și distanța dintre raportul *d*:*l* și $\sqrt{2}$ se micșorează pe măsură ce crește *l*, dar nu se anulează niciodată, ceea ce putea foarte bine să reprezinte un argument circumstanțial pentru a înțelege că diagonala și latura unui pătrat sunt incomensurabile.[87]

Se poate afirma că 2 e *limita* șirului de rapoarte $d^2:l^2$. Într-adevăr, *l* poate fi calculat în așa fel încât distanța dintre 2 și raportul $d^2:l^2$ să fie mai mică decât o cantitate ε arbitrar de mică, pentru că distanța aceea e egală cu $d^2:l^2-2 = \pm 1/l^2$. Cu alte cuvinte, șirul de rapoarte devine din ce în ce mai dens în apropierea lui 2: dacă fixăm o fracție ε arbitrar de mică (de exemplu, $\varepsilon = 1/n$, cu *n* egal cu un număr foarte mare), atunci există un număr *infinit* de rapoarte $d^2:l^2$ la distanță *mai mică* decât ε față de 2, în timp ce numai un număr *finit* de rapoarte e la distanță *mai mare* decât ε. În termeni de fracții, vom spune că șirul de fracții d^2/l^2 *converge* la 2 sau că *d*/*l converge* la $\sqrt{2}$.

Acest mod de a concepe limita, apropiat de formularea modernă a lui Cauchy și Weierstrass, e într-un anume sens contraintuitiv, dar răspunde unui criteriu matematic mai precis. Putem acum să repetăm ce am spus despre limita unei funcții în cazul șirurilor de rapoarte sau de fracții *d*/*l*. Intuiția ne îndeamnă să observăm evoluția șirului de fracții în sens dinamic, ca și cum ar fi vorba despre mișcarea unei fracții care tinde să se apropie treptat de un punct de sosire. Dar evoluția dinamică, cel puțin așa cum

era concepută în analiza infinitezimală a secolului XVII, nu are o formulare matematică limpede şi lasă spaţiu larg confuziilor cu privire la atingerea efectivă a limitei. Definiţia mai riguroasă răstoarnă perspectiva: se alege *întâi* o vecinătate arbitrar de mică a limitei L (de rază ε) şi se determină, în baza ei, de la care punct încolo termenul generic al şirului intră în acea vecinătate. Această concepţie despre limită, a lui Cauchy şi Weierstrass, în care e întipărită o idee opusă celei de tensiune dinamică, e conformă cu o conotaţie statică şi atomică a numerelor şi se potriveşte cu o concepţie despre infinit în sens actual şi potenţial deopotrivă.

Nu e de prisos să semnalăm că această răsturnare de perspectivă din definiţia modernă a limitei unui şir urmează îndeaproape logica proprie calculului aproximativ. În *computatio* algebrică dinaintea lui Cauchy şi Weierstrass, simbolul ε nota de obicei eroarea reziduală în calculul unui număr iraţional cu ajutorul unui şir de fracţii oprit la un anumit termen (la distanţă ε de soluţie). Eroarea ε putea fi prestabilită în aşa fel încât să fixaze un criteriu de oprire. În mod asemănător, în şirul de fracţii d^2/l^2 se poate decide oprirea avansării atunci când eroarea reziduală $(1/l^2)$ e mai mică decât o fracţie ε fixată dinainte.[88]

Şirul de rapoarte $d^2:l^2$ defineşte un şir de intervale $I_1, I_2, \ldots, I_k$, fiecare dintre ele conţinând numărul 2 şi are drept capete câte o aproximaţie prin lipsă şi prin exces a lui. Intervalele sunt incluse unul în celălalt şi se micşorează din ce în ce în jurul lui 2, dar lungimea lor nu devine niciodată nulă. Aceeaşi concluzie pentru rapoartele $d:l$. Doar că în acest caz intervalele includ o entitate de natură diferită de a lui 2, notată cu simbolul $\sqrt{2}$. E imposibil să eliminăm complet intuiţia prezenţei actuale a acestei entităţi, chiar dacă iraţionale, dar trebuie înţeles că există cu adevărat, spre deosebire de nedefinirea *ápeiron*-ului, doar rapoartele $d:l$. Putem deci defini numărul $\sqrt{2}$ chiar drept şirul infinit de intervale care-l conţin, pentru că cele două capete ale fiecăruia sunt numere raţionale efectiv calculabile, egale tocmai cu rapoartele $d:l$. În acest caz, am putea fi tentaţi să înlocuim gradualitatea aproximării cu o

entitate individuală, un simbol care să corespundă unui nou număr şi care să desemneze şirul de intervale.

Dacă gândim orice număr iraţional drept un şir infinit de intervale care-l includ şi dacă îl notăm cu un simbol, va trebui să concepem acum un nou domeniu de simboluri-numere ca o multiplicitate de indivizi distincţi, în număr infinit. Este un pas decisiv, înlesnit de posibilitatea de a defini formal o aritmetică a acestor simboluri-numere, analoagă aritmeticii numerelor raţionale.

Decisivă e şi următoarea împrejurare: şirul infinit de intervale incluse unul într-altul dă naştere unei *separări* a mulţimii tuturor numerelor raţionale în două clase. Prima clasă conţine toate numerele raţionale care stau la sânga intervalelor I_k pentru k suficient de mare, adică sunt mai mici decât capătul din stânga al tuturor intervalelor I_k, cu excepţia unui număr finit dintre ele. Cea de-a doua clasă conţine numerele raţionale mai mari decât capătul din dreapta al tuturor intervalelor I_k, cu excepţia unui număr finit dintre ele. Acestor două clase li se adaugă o a treia, formată din numerele raţionale conţinute în toate intervalele. Acum, această a treia clasă, dacă nu e vidă, conţine un unic număr raţional r. Atunci prima şi a doua clasă conţin toate numerele raţionale care sunt, respectiv, mai mici şi mai mari decât r, iar şirul de intervale *reprezintă* numărul r. Dacă a treia clasă e vidă, adică nu conţine nici un număr raţional, şirul de intervale *reprezintă* un număr iraţional.

Această împărţire a mulţimii numerelor raţionale e exact ceea ce Dedekind definea, pe la sfârşitul secolului XIX, drept *tăietură* a corpului numerelor raţionale. Numerele *reale*, raţionale şi iraţionale, erau concepute ca tăieturi. Dar conceptul de tăietură e deja implicit în matematica greacă, tocmai în mecanismul lui *antanaíresis* şi în construcţia rapoartelor *d/l*. Raţionamentul e similar celui al lui Poincaré din *Ştiinţă şi ipoteză* (1902): ne simţim aproape obligaţi să concepem un număr, chiar dacă iraţional, la fel cum ne simţim obligaţi să recunoaştem că există şi e real punctul P de intersecţie dintre două curbe în planul cartezian,

deplasându-ne înspre el din dreapta şi din stânga cu abscise raţionale din ce în ce mai apropiate de abscisa lui *P*.

E surprinzătoare prezenţa simultană, în aceleaşi formule recursive cu care se calculează numerele laterale şi diagonale, a unei demonstraţii de non-existenţă (nu există o măsură comună *m*) şi a construcţiei efective a aproximărilor raţionale pentru ceea ce, în corpul numerelor raţionale, nu poate exista. Sunt cele două faţete ale matematicii puse în evidenţă de Proclus: una teoretică, cealaltă problematică. Cu prima, încercăm să stabilim un rezultat teoretic, cum ar fi existenţa sau inexistenţa unei soluţii raţionale; cu a doua, construim efectiv soluţia sau o fracţie care o aproximează dacă soluţia raţională nu există. Două raţionamente complementare care se realizează în aceleaşi formule.

Construcţia pătratelor de dimensiune mereu mai mare sau mereu mai mică e un proces indefinit, care nu ia sfârşit niciodată. Totuşi, chiar în absenţa unui ultim pas, forma şi regularitatea procesului permit tragerea unei concluzii care priveşte întregul şir de pătrate şi *o infinitate* de alegeri posibile. E implicit aici ceea ce în logică se numeşte cuantificator universal: *orice* segment, oricât de mic, nu poate fi o măsură comună pentru diagonala şi latura unui pătrat. Avem o *demonstraţie de non-existenţă*, dar în acelaşi timp ajungem, pe calea evidenţei geometrice, la o realitate. *Realitate* şi *existenţă* nu sunt deloc acelaşi lucru, sunt două concepte care acţionează în planuri diferite.[89] Real e un lucru care se afirmă cu necesitate, nu în baza unei convenţii. Mai mult, convenţionalismul i-ar falsifica acelui lucru natura, slăbind acel caracter de ineluctabilitate, de obligaţie impus chiar de formule sau de algoritm. Noi nu decidem nimic, numerele sunt cele care se dispun conform unei legi proprii, independente de voinţa noastră.

Şirul de laturi l şi de diagonale d ale pătratelor, luate la scară crescătoare, e infinit, dar şirul de rapoarte $d:l$ are o *limită*, reprezentată de ceea ce numim „rădăcina pătrată a lui 2", pentru că raportul d^2/l^2 converge la 2.[90] Adăugând calculului aproximaţiilor ale căror distanţe faţă de limită descresc progresiv conceptele de

raport şi de limită, reuşim să depăşim ineficienţa *ápeiron*-ului. Chiar dacă deschis şi potenţial, *ápeiron*-ul e, ca să spunem aşa, perfecţionat de limită şi ascultă de o regularitate a desfăşurării sale din care se pot deduce concluzii *finale*. Antidotul nedefinirii *ápeiron*-ului se afla deci în conceptul matematic de raport, în timp ce din generarea progresivă a numerelor *d* şi *l* se găseşte „dintr-o dată nemărginitul, pentru că nemărginitul e mărginit de un raport care se găseşte dintr-o dată".[91] Este exact ce spune Platon în *Philebos* (16 c): lucrul cognoscibil, real, e o combinaţie de mărginit şi nemărginit.

La Iamblichos, la Theon din Smirna şi la Proclus, adică în sursele care zăbovesc cel mai mult asupra detaliilor algoritmului, nu găsim nici o aluzie explicită la faptul că rapoartele $d^2:l^2$ se apropie de 2. Platon, după cum aminteam, se referă la „diagonala raţională a lui 5" (literal: diagonala exprimabilă), adică la numărul 7 despre care ştim că e o aproximaţie a diagonalei pătratului de latură 5 care, dimpotrivă, e iraţională sau, mai bine zis, secretă, indicibilă. Dar nu găsim conceptul de aproximare, poate cel mult în opoziţia dintre raţional şi iraţional. Doar într-un pasaj din *Omul politic* (287 c), Străinul din Elea se referă la *diaíresis*, la strategia de căutare prin împărţiri succesive, spunând că „trebuie să împărţim mereu, atâta vreme cât se poate, prin numărul cel mai apropiat de doi". Această *apropiere*, în limba greacă *engýtes*, ar putea trimite la micşorarea distanţelor, la îndesirea rapoartelor care tind la numărul iraţional. Numerele iraţionale, ca $\sqrt{2}$, vor fi definite formal, în secolul XIX ca şiruri de numere raţionale p/q (cu p şi q numere întregi) care se îndesesc din ce în ce mai mult în apropierea limitei lor.

Interpretat ca „diagonală raţională a lui 5", numărul 7 trimite la posibilitatea de a exprima iraţionalul prin raţional folosind numerele. În rapoartele dintre numere (întregi şi pozitive) găsim expresia reală, concretă, în act, a ceea ce vom reuşi să exprimăm doar negativ, ca raport de mărimi pentru care *nu există* o unitate de măsură comună. Împrejurare întărită de comentariul lui Theon

din Smirna pentru care unitatea (*monás*), care e valoarea inițială fie a laturii *l*, fie a diagonalei *d*, pornind de la care se construiesc rapoartele *d*:*l* „ca început al tuturor lucrurilor, ea trebuie să fie în potență (*dinámei*) fie latură, fie diagonală".[92] În *dýnamis*, cum voia Platon (*Epinomis*, 990 c), se găsea *realitatea* entităților numerice cu care se putea exprima indicibilul.

Faptul remarcabil, și deja evident în matematica greacă și în calculele vedice, e că relațiile de echivalență și operațiile de augmentare și de diminuare ale figurilor *geometrice* sunt, în general, în strânsă relație cu operații recursive analoage asupra unor mărimi *numerice*. Aceste operații fac să crească numerele întregi *p* și *q* care definesc fracțiile *p*/*q* ce aproximează rapoartele de mărimi incomensurabile; iar incomensurabilitatea e, la rândul său, vizibilă în comportamentul la limită al șirurilor de figuri asemenea care cresc sau se micșorează.

Se știe că aproximarea e mai bună atunci când cresc numărătorul și numitorul fracției, lucru întâlnit deja în numerele laterale și diagonale care cresc după o lege recursivă. Dar un calculator, uman sau digital, operează întotdeauna cu un număr *t* de cifre dinainte fixat și rotunjește numerele cu mai mult de *t* cifre, producând pierderi ireparabile de informație când aproximează limita. Din acest motiv – dar nu numai din acesta – calculatorul digital preferă să reprezinte fracțiile *p*/*q* ca numere în „virgulă mobilă".[93] Dar ajustarea aceasta nu e de ajuns pentru că, așa cum vom vedea, creșterea numerelor poate compromite stabilitatea[94] procedurilor, cerință fundamentală pentru eficiența lor.

Incomensurabilitatea e legată de problema structurii continuului. Problema centrală e aceeași: continuul se compune din părți indivizibile, ori părțile în care se poate împărți sunt, la rândul lor, indefinit divizibile? Într-un pasaj din tratatul *De lineis insecabilibus*, care face parte din *Corpus Aristotelicum* (970 a 144 și urm.), se demonstrează inconsistența conceptului de segment indivizibil. Se consideră un șir de pătrate supus unui *antanaíresis*, algoritmul euclidian pentru calculul celui mai mare divizor comun

al diagonalei și laturii. Dacă, prin absurd, ar exista un segment indivizibil, se argumentează, el ar fi latura unui pătrat a cărui diagonală, împărțită la latură, ar da ca rest un segment de lungime *mai mică* decât latura, în caz contrar pătratul construit pe diagonală ar fi cel puțin de 4 ori, și nu de 2 ori, mai mare decât primul. S-ar găsi astfel un segment mai mic decât latura, care fusese presupusă indivizibilă, de unde contradicția. Motiv pentru care Aristotel putea afirma că tezele atomiste se opun faptelor pe care matematicienii le pot demonstra – între ele, ne putem imagina, incomensurabilitatea diagonalei și a laturii unui pătrat.

Posibilitatea de a reprezenta numerele *d* și *l* cu ajutorul unor șiruri nemărginite de figuri asemenea e menționată peste tot în literatură, chiar dacă în mai multe formulări și cu aplicații geometrice diferite. Formulele pentru generarea numerelor *d* și *l* par legate de o variantă a formulei algebrice corespunzătoare unei teoreme a lui Euclid (*Elementele*, II, 10) din care se poate extrage o lege de construcție a șirurilor de pătrate. Ceea ce arată că în *Elemente* nu avem doar – așa cum afirmă o teză îndoielnică și mult discutată – o *algebră geometrică*, adică o algebră înveșmântată în straiele limbajului geometric, ci și o *computatio geometrica*, un calcul numeric a cărui structură e corelată cu figurile geometrice. Cele două aspecte trebuie deosebite, deoarece formulele algebrice *nu* sunt algoritmi. De exemplu, formula care notează produsul a trei numere, $a \times b \times c$, corespunde la *două* proceduri posibile, sugerate de expresiile $(a \times b) \times c$ și $a \times (b \times c)$ care pot furniza rezultate complet diferite.[95]

Există și o legătură esențială între demonstrația incomensurabilității indicată în figura 5 și geometria vedică. În figura 5 apar 4 pătrate egale, anume CHKG, BFKG, KFAE și HDEK. Pătratul mai mare, compus din aceste 4 pătrate, coincide cu corpul unuia dintre altarele vedice principale, indicat în figura 1. Trasând diagonalele în fiecare pătrat al corpului central al altarului și repetând operațiunea în așa fel încât să obținem un *emboîtement** progresiv

* În franceză în text (*N. t.*)

de figuri geometrice, se demonstrează incomensurabilitatea laturii cu diagonala unui pătrat. Aceeaşi construcţie duce şi la demonstraţia intuitivă, imediată, a teoremei lui Pitagora aplicată triunghiurilor dreptunghice cu catete egale. Se presupune că această construcţie era cunoscută autorilor tratatelor vedice despre construcţia altarelor. În comentariul său la *Śulvasūtra* lui Āpastamba, Albert Bürk nu uită să observe acest lucru şi aminteşte că acel corp central al lui Agni nu e altceva decât *ātman*, subiectul atoateînţelegător, beneficiarul central al lumii, nucleu a tot ce are viaţă şi conştiinţă universală care rămâne, dincolo de creştere şi de formele multiple pe care le ia, mereu egal cu sine.[96]

11

Realitatea numerelor. Şirurile fundamentale ale lui Cantor

Teoriile matematice ale continuului aritmetic elaborate la finele secolului XIX păreau capabile să respingă paradoxul lui Zenon despre pluralitate, paradox care se bazează pe presupunerea că *o sumă finită sau infinită de mărimi fără extensiune*, cum sunt punctele unei drepte, *e întotdeauna o mărime nulă*. Dacă presupunerea s-ar verifica, realitatea s-ar topi în neant şi în nefiinţă: teză inacceptabilă care, în logica eleată, era menită să ducă la concluzia că nu există multiplicitate şi că fiinţa e *una*. Teza lui Parmenide, potrivit căreia Fiinţa e una, imobilă, omogenă, izotropă şi continuă, iar orice multiplicitate e iluzorie era totuşi mai puţin paradoxală decât consecinţele care derivau din existenţa unei pluralităţi (de orice tip ar fi fost ea).

Teoria continuului numeric se bazează în primul rând pe corespondenţa biunivocă dintre punctele dreptei şi numerele reale (numere raţionale, sau fracţii, la care se adaugă numerele iraţionale) care permite considerarea *dreptei reale* fie ca entitate geometrică, fie ca entitate numerică. Această entitate se poate defini în mai multe moduri echivalente. Un *număr* real, care e şi *punct* al dreptei, e un număr zecimal infinit periodic sau fără perioadă. Echivalent, numerele reale constau din aşa numitele *şiruri fundamentale* de numere raţionale (fracţii). Statutul lor ontologic ne e dezvăluit în bună măsură de următoarele cuvinte ale lui Cantor:

Avem o primă generalizare a noțiunii de mărime numerică atunci când, în virtutea unei legi anume, obținem o serie infinită de numere raționale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, asfel încât diferența $a_{n+m} - a_n$ devine infinit de mică pentru n crescător, oricare ar fi numărul întreg m, sau, altfel spus, așa încât, dat un număr pozitiv ε arbitrar, există un număr întreg n_1 pentru care $a_{n+m} - a_n$ (în valoare absolută) e mai mic decât ε atunci când $n \geq n_1$, iar m e un întreg pozitiv, ales arbitrar. Exprim astfel această proprietate a seriei: „seria are o limită bine determinată b". Așadar, aceste cuvinte nu servesc decât pentru a enunța această proprietate a seriei, fără ca deocamdată să se refere la altceva; și așa cum legăm seria de un anumit semn particular b, la fel trebuie să atribuim diverse semne b, b', b'' diverselor serii de același fel.[97]

Pentru Cantor, numerele reale coincid cu simbolurile care notează șirurile de fracții care se îndesesc indefinit în apropierea limitei și sunt astfel încât, pentru indici mai mari decât o anume valoare n_1, *a cărei calculabilitate efectivă nu e deocamdată cerută*, diferența în valoare absolută dintre două fracții e mai mică decât orice număr rațional pozitiv dat ε. Vedem în această explicație spiritul esențialmente formalist în care Cantor introduce numerele reale care constau exact în acele serii. *Semnul b* notează seria și notează deci totodată și un *număr* (rațional ori irațional), chiar dacă e doar un simbol introdus ca să reprezinte într-un mod mai concis seria.

Numerele reale *sunt* deci, prin definiție, șiruri sau succesiuni fundamentale, iar aritmetica lor e o extensie formală a operațiilor uzuale la șirurile respective. Șirul rapoartelor dintre numerele diagonale și laterale e fundamental în sensul lui Cantor și individualizează numărul real pe care îl notăm cu simbolul $\sqrt{2}$. Algoritmul de aproximare a rădăcinii pătrate a lui 2 pus la punct de pitagoreici era deci o formă de *realizare efectivă* a punctului lipsit de extensiune care corespundea lui $\sqrt{2}$.

Cantor a demonstrat că o colecție oarecare de intervale de lungime nenulă de pe dreapta reală, care nu se suprapun unul cu altul, e o mulțime cel mult numărabilă și deci se află în corespondență 1-1 cu mulțimea numerelor întregi pozitive. În schimb,

conglomeratul numerelor reale concepute ca şiruri de intervale de lungimi tinzând progresiv către zero formează o mulţime care *nu* e numărabilă. Demonstraţia lui Cantor folosea celebrul său procedeu diagonal.

Teria lui Cantor nu se bazează pe diviziunea indefinită a dreptei care să conducă *în final* la puncte lipsite de dimensiune, ci pe preexistenţa în act a unei infinităţi mai mult decât numărabile de puncte-numere care trebuie gândite ca şiruri de intervale ale căror lungimi scad treptat şi tind către zero. Dacă fiecărui asemenea şir îi asociem formal un *simbol* (aşa cum propunea Cantor referindu-se la şirurile fundamentale), putem apoi să gândim mulţimea acestor simboluri individuale ca un agregat de puncte atomice cu ajutorul cărora putem defini intervale de *lungime* pozitivă. La urma urmei, e vorba despre o construcţie simbolică, de un *model* matematic al continuului care, chiar dacă permite fundamentarea analizei, nu răspunde pe de-a-ntregul intuiţiei noastre. Dar acum mulţimea numerelor reale cuprinse între două extreme, a şi b, cu $a < b$, altfel spus intervalul $[a, b]$, are o lungime bine definită de numărul real b-a care nu e egal cu zero. Aşadar, dacă e coerentă, teoria lui Cantor şi Dedekind ne pune la adăpost de paradoxul lui Zenon întrucât permite definirea unor intervale de lungime *finită şi nenulă* formate dintr-o colecţie (mai mult decât numărabilă) de puncte lipsite de dimensiune.

S-ar atinge astfel şi scopul de a conferi continuului o conotaţie de actualitate şi de efectivitate, asta dacă vrem să creditäm teza lui Whitehead conform căreia actualitatea are un caracter pur atomic. De altfel, matematica e instrumentul esenţial pentru a înţelege dacă această idee de realism atomic poate conduce la o teorie acceptabilă şi coerentă. După cum nota John Locke (*Cercetare asupra intelectului omenesc*, II, 17, p. 9), găsim în număr conceptul cel mai adecvat pentru înţelegerea naturii infinitului şi pentru a ne orienta în acea mulţime de elemente confuze în care ne împinge infinitul şi printre care mintea, lipsită de alte mijloace adecvate, sfârşeşte prin a se pierde. Şi fizica studiază atomii. Dar,

în acest domeniu, fizica și matematica urmăresc țeluri diferite: dacă fizicianul cercetează relația reciprocă dintre gândire și realitate, matematicianul, în schimb, caută să limpezească legătura dintre gândirea sa și formule, încercând deci să elaboreze modele potrivite și suficient de plauzibile pentru intuițiile noastre, condiții necesare pentru a le putea aplica lumii reale. Chiar dacă au orientări științifice diferite, fizica și matematica țintesc totuși amândouă către fundamentarea realității lumii.

Chestiunea mai prezintă totuși destule dificultăți. Un număr real e un element al unui domeniu abstract ale cărui axiome sunt satisfăcute de diverse entități matematice care s-ar putea să nu fie numere. S-ar putea atunci încerca definirea *esenței* entităților matematice doar până la un izomorfism, acceptând absența aproape de neeliminat a categoricității.[98] În plus, tendința noastră e să gândim un punct al dreptei reale ca pe o entitate indivizibilă. Se potrivește conceptul de număr – ca șir fundamental, ca tăietură sau ca șir de intervale – cu acest mod de gândire? Și Dedekind, și Cantor se simțeau cumva obligați să *creeze* o entitate nouă care să corespundă unui șir sau unei tăieturi și care să poată fi notată cu un simbol căruia să i se atribuie aceeași realitate ca oricărui număr întreg.[99]

Pentru Cantor, statutul ontologic al numerelor transfinite era asemănător statutului ontologic al numerelor reale, ambele bazându-se pe o definiție formală. Nu e atunci întâmplător că în diverse ocazii el a insistat asupra *realității* intrinsece a numerelor de orice fel, deoarece aceste numere, oricât ar fi de abstracte, sunt fundamentul unei actualități de tip atomist, singura care, în cadrul axiomatic al unui corp numeric complet și ordonat, părea să poată fi contrapusă infinitului pur potențial al unei diviziuni iterate a continuului. Deci nu doar pentru că avea nevoie să definească în mod coerent numerele transfinite, dar și din motivul explicat mai sus era Cantor înclinat să considere că infinitul actual e realizabil în matematică.

Anunțându-și noile descoperiri, Cantor a declarat că *„noile numere astfel obținute au atunci aceeași precizie concretă și aceeași realitate obiectivă ca și precedentele"*.[100] Deja pentru Cantor numerele întregi sunt entități *actuale*, în sensul că, prin chiar definiția lor, au o poziție perfect determinată și distinctă în gândirea noastră, ajungând să-i determine și să-i modifice desfășurarea. *Actualitatea* numerelor înseamnă că ele „trebuie considerate ca o expresie ori imagine (*Abbild*) a unor procese și relații din lumea *exterioară*, distinctă de intelect".[101]

În 1883, în monografia *Fundamentele unei teorii generale a multiplicităților*, Cantor ia pentru prima dată în mod public apărarea infinitului actual, în opoziție cu lunga tradiție care urcă până la Aristotel și care, cu puține excepții – printre care una dintre cele mai importante e Bernhard Bolzano, în *Paradoxurile infinitului* –, atribuise infinitului o semnificație pur potențială. În *Fundamente*, Cantor distingea, într-un sens matematico-formal, *reellen Zahlen*, adică numerele reale distincte de numerele complexe (cum e rădăcina pătrată a lui –1), de *realen Zahlen*, numere care au o existență reală și nu doar formală (chiar dacă introduse în mod formal). Numerele transfinite și cele iraționale, definite de șiruri fundamentale, aveau deci un statut ontologic întru totul analog – cele iraționale, mai ales în relație cu punctele spațiului geometric, cele transfinite, în relație cu o realitate materială constând dintr-o mulțime de monade de (încă) incertă cardinalitate. Numerele transfinite, nota Cantor, trebuie considerate în același fel ca noile numere iraționale. Însăși definiția lor matematică formală le punea pe același plan. Numerele iraționale și transfinite se asemănau în natura lor cea mai profundă, ambele fiind forme sau variante ale infinitului actual, astfel că dacă unele nu erau acceptate, atunci, pentru coerență, nici celelalte nu puteau fi acceptate.[102] Definind atomii numerici ai dreptei continue ca șiruri fundamentale, infinite, de rapoarte de numere întregi, Cantor moștenea astfel realismul atomist al pitagoreicilor. *Arithmós*, numărul întreg pozitiv,

părea acum în măsură să fundamenteze o matematică a indivizibilelor, a numerelor-puncte ale continuului.

Teza lui Cantor a fost apărată de Gottlob Frege, acesta punând pe acelaşi plan statutul ontologic al numerelor de diverse tipuri în baza coerenţei logice:

> Împărtăşesc pe deplin aprecierea pe care el [Cantor] o dă concepţiei care în genere nu acceptă ca având realitate decît numerele finite [...] În investigaţiile noastre putem utiliza fără ezitare un nume sau semn introdus ireproşabil din punct de vedere logic, şi deci numărul nostru este tot atât de justificat ca numărul doi sau numărul trei.[103]

Aşadar, pentru Frege, toate numerele introduse într-un mod coerent din punct de vedere logic erau *efective.* Era aceasta o marcă a realităţii pe care numerele raţionale şi iraţionale o imprimau acum continuului precum şi tuturor teoriilor din analiză cu care se putea stabili că anumite entităţi matematice, cum era punctul de intersecţie a două drepte, *există* în continuu. O situaţie care răsturna întreaga teorie a spaţiului-timp în vigoare până în acel moment şi respingea opinia cea mai răspândită printre filozofi, cel puţin de la Leibniz încoace, că un spaţiu compus din puncte ar fi o imposibilitate logică (Russell, *Principles*, par. 423). Un moment critic al evoluţiei acestei teorii fusese *Critica raţiunii pure* a lui Kant, în speţă a doua antinomie pe care o discuta, privind compunerea substanţelor. Teza antinomiei era afirmaţia următoare: „Orice substanţă compusă, în lume, constă din părţi simple şi nu există nicăieri absolut nimic decât simplul sau ceea ce este compus din simplu".[104] Russell explicase că, graţie recentei teorii aritmetice a continuului, afirmaţia contrară, antitetică, nu mai putea fi susţinută: argumentul adus împotriva tezei şi împotriva existenţei punctelor, observa el (*Principles*, p. 435), ar demonstra că nici măcar numerele nu pot exista, fie ele raţionale sai iraţionale, pentru că în teoria lui Cantor şi Dedekind ele erau asociate punctelor de pe dreaptă. În *Doctrina ştiinţei* (315, 7), din 1837, Bernhard Bolzano înfruntase deja problema, susţinând că

demonstrația antitezei kantiene, potrivit căreia nici o substanță compusă nu constă din părți simple, era complet greșită. Bolzano înțelegea continuul drept un agregat de entități simple, ca punctele ori momentele. Una peste alta, teoria sa era inadecvată: în lipsa unui criteriu de *completitudine*, rămâneau golurile din corpul numerelor raționale. Dar chiar și în celebrul său tratat *Paradoxuri ale infinitului*, apărut postum, în 1851, Bolzano anticipa totuși în mod eficient atomismul numeric care avea să caracterizeze teoriile mai riguroase ale continuului aritmetic de la sfârșitul secolului.

Pe de altă parte, Henri Bergson observase că această concepție a componentelor punctiforme ale spațiului și timpului e conformă cu cerințele unui realism – fie el practic, fie filozofic. Bergson fusese frapat, spunea el, de constatarea că timpul trăit, atât de central pentru filozofie, scăpa complet matematicii.[105] Timpul și spațiul erau puse de matematică pe același plan, ca lucruri de același fel, și pentru a trece de la unul la celălalt era suficient să se schimbe „succesiune" cu „juxtapunere". Inteligența noastră, nota Bergson, acționează mai lesnicios atunci când are de-a face cu puncte fixate într-un anumit mod: ea se întreabă unde se află la un anumit moment dat un lucru în mișcare, unde se va afla în momentul următor și pe unde va trece; și chiar dacă astfel ea pare interesată de durata temporală, „ea vrea întotdeauna să aibă de-a face cu imobilități, reale ori posibile".[106] Dar cu Bergson sensul și scopul continuului matematic se răstoarnă: tocmai pentru că sunt reale sau actuale, pentru a răspunde nevoilor noastre practice, timpul și spațiul matematice trădează experiența trăită și timpul interior. Norbert Wiener, pe parcursul colaborării sale cu Eberhard Hopf, a fost cel care și-a dat seama că timpul bergsonian, care nu e un flux liniar, ci un „*emboîtement* de fapte de conștiință unul într-altul, în graduala îmbogățire a eului",[107] putea fi folosit și pentru a explica fizica stelelor și funcționarea bombei atomice. Împreună cu Hopf, Wiener a introdus o clasă de ecuații integrale (numite ale lui Wiener-Hopf) care erau gândite să simuleze procese temporale de naturi extrem de diferite, cu tehnici eficiente

de predicție și de filtrare a semnalului. Chiar și în fundalul activităților și cercetărilor lui Wiener, în studiul dispozitivelor și modelelor matematice bazate pe conceptul de retroacțiune (*feedback*), era detectabilă o orientare conformă cu viziunea lui Proust ori a lui Bergson. Timpul ciberneticii, care se despărțea cumva de acela al fizicienilor, trebuia să fie și timpul fenomenelor teleologice, al proceselor de creștere și de învățare, asemănându-se astfel duratei trăite cu adevărat, timpului interior organizat ca proces de reciprocă întrepătrundere a unor stări de conștiință. Structura sa, bazată pe fenomenul de *emboîtement*, se putea exprima în modelele matematice ale proceselor temporale,[108] în termeni de integrale și de matrice Toeplitz care exprimau aceeași idee a creșterii figurilor pe calea unor succesive corecții gnomonice din matematica antică.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ g & a & b & c & d & e \\ h & g & a & b & c & d \\ i & h & g & a & b & c \\ l & i & h & g & a & b \\ m & l & i & h & g & a \end{bmatrix}$$

Matricele Toeplitz (aici, un exemplu cu 6 linii și 6 coloane) sunt caracterizate de egalitatea elementelor de pe liniile paralele cu diagonala principală, astfel că pentru a le defini e nevoie numai de prima linie și de prima coloană. Fenomenul de *emboîtement* e vizibil în faptul că în interiorul matricei putem distinge matrice mai mici, dar cu aceeași formă a lui Toeplitz. O proprietate de autosimilaritate care amintește de construcții analoage din geometria greacă și care, în acest caz, se reflectă în structura matricei inverse,[109] care se poate autogenera din prima linie și din prima coloană.

Matricele Toeplitz, consecință directă a discretizării ecuațiilor Wiener-Hopf, au devenit în timp extrem de importante în algebra

matricială, prezentându-se ca un arhetip de referință pentru studiul conceptului algebric de *structură* a unei matrice. În această structură erau de căutat atât rațiunile eficienței computaționale, cât și motivele afinității dintre timpul trăit și timpul matematic.

În concluzie, continuul aritmetic al numerelor reale era și baza matematicii aplicate, în timp ce numerele, ordonate în forme corespunzătoare unor modele precise din realitatea fizică ori biologică, puteau aminti, prin analogie, realitatea timpului trăit, a autenticului timp interior pe care Bergson îl opusese timpului spațializat al matematicii. Ceea ce depindea, era convingerea lui Wiener, de existența unor anumite procese particulare care pot să capete deopotrivă o semnificație fizică, chimică, fiziologică ori matematică.

S-a descoperit însă repede, mai ales grație lui Brouwer, că seriile fundamentale care serveau la definirea numerelor reale în noua teorie a continuului aritmetic nu răspund unui criteriu de efectivitate computațională. A fost acesta un pas critic, legat de criza fundamentelor matematicii, în cursul căruia actualitatea și efectivitatea au devenit prerogativa unui alt concept, cu precizarea căruia s-au însărcinat matematicienii secolului XX – conceptul de *algoritm*.

12

Realitatea numerelor. Tăieturile lui Dedekind

E de toţi recunoscută importanţa logicii pentru dezvoltarea matematicii. Dar putem oare afirma că matematica *derivă* din logică? Întrebarea e diferită de aceea care priveşte posibilitatea *reducerii* matematicii la logică, întrebare la care încercaseră să răspundă pozitiv Richard Dedekind, Gottlob Frege şi Bertrand Russell pe la sfârşitul secolului XIX şi începutul secolului XX.

Dacă examinăm principiile care, în Antichitate, au fundamentat ambele discipline, matematică şi logică, ne găsim blocaţi în dilema: raţionamentul pe care se bazează silogismul îşi are originea şi justificarea sa autonome, sau se naşte din matematică? Cercetări relativ recente au demonstrat cel puţin plauzibilitatea celei de-a doua ipoteze: o interpretare atentă a teoriei silogistice a lui Aristotel (*Analitica primă*, 25 b 26 şi urm.) pune deja în evidenţă un tip de raţionament şi o alegere corespunzătoare a termenilor care trimit la teoria greacă a proporţiilor.[110]

Atunci ce putem spune despre teoria proporţiilor? Este ea o teorie matematică, ori o teorie logică, gândită şi prezentată în veşmânt matematic? Întrebarea nu e oţioasă: e susţinută de faptul că teoria euclidiană a proporţiilor poate fi considerată drept o logică mascată (o susţinea, în mod implicit, Hans Reichenbach încă în 1928),[111] şi de acela că definiţia proporţiilor din cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid a dat naştere, spre sfârşitul secolului XIX, unei extensii de natură aparent *logică* a conceptului de număr.

Cum e deja evident în exemplul numerelor laterale şi diagonale, un număr real poate consta într-un şir infinit de intervale cu capete raţionale, fiecare dintre ele conţinut în precedentul, a căror lungime tinde progresiv către zero. În virtutea unui postulat, se presupune că există un punct conţinut în toate intervalele. În plus, fiind dat şirul de intervale, se poate găsi un criteriu pentru a împărţi corpul numerelor raţionale în două clase, astfel ca orice număr din prima clasă să fie mai mic decât orice număr din a doua clasă.[112]

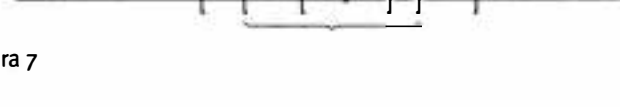


Figura 7

Pe exemplul acestei scheme, spre sfârşitul secolului XIX, au fost elaborate modele ale continuului aritmetic echivalente în mod esenţial cu acela al şirurilor fundamentale ale lui Cantor. În particular, Dedekind[113] a explicat în toate detaliile că un număr iraţional x e definit de îndată ce se produce un criteriu pentru a plasa orice număr raţional în una şi numai într-o singură clasă de numere raţionale A şi B, astfel ca orice număr din A să fie mai mic decât orice număr din B şi, în plus, A nu are un element maxim iar B nu are un element minim.[114] În limbajul lui Dedekind, perechea (A, B) defineşte o *tăietură* (*Abschnitt*) a corpului numerelor raţionale. Aceeaşi semnificaţie are teoria proporţiilor lui Eudoxos-Euclid. Ea stabileşte că, date patru mărimi a, b, c şi d, rapoartele $a:b$ şi $c:d$ sunt egale dacă $a:b$ e mai mare, egal sau mai mic decât raportul $m:n$ (cu m şi n întregi) de îndată ce raportul $c:d$ e respectiv mai mare, egal sau mai mic decât $m:n$.[115] În acest caz, raportul $a:b$ împarte mulţimea numerelor raţionale în două clase A şi B, prima formată din toate rapoartele $m:n$ mai mici decât $a:b$, a doua din toate rapoartele $m:n$ mai mari decât $a:b$. Analog se pot defini două clase C şi D corespunzătoare raportului $c:d$, după care se demonstrează că $A = C$ şi $B = D$. Altfel spus, dacă rapoartele $a:b$ şi $c:d$ sunt egale în sensul lui Euclid (*Elementele*, V, Def. 5), atunci

ele determină aceeaşi tăietură, adică perechile relative de clase care definesc tăieturile sunt coextensive.

Ideea de tăietură e relativ abstractă şi se pretează unei definiţii logice a numerelor reale ca aceea propusă de Russell ori de Quine; dar s-a văzut că un exemplu tipic de tăietură se obţine din *algoritmul* care calculează rapoartele *d:l* între numerele diagonale şi laterale pentru aproximarea lui $\sqrt{2}$. Sigur că acest algoritm era doar unul dintre mulţi alţii posibili, imaginaţi în vremuri îndepărtate, din care poate că s-au inspirat Eudoxos şi Euclid, iar după ei Dedekind. Dar el are un caracter paradigmatic pentru că implică principalele concepte cu care s-a elaborat o definiţie a numerelor reale. Proprietatea de *completitudine* a numerelor reale, care exprimă absenţa lacunelor, poate fi formulată afirmând că *orice tăietură Dedekind e generată de un număr real. Completitudinea* (orice element generează o tăietură) şi *densitatea* (oricum s-ar da două elemente distincte a şi b, cu $a<b$, există un alt element mai mare ca a şi mai mic ca b) sunt cele două proprietăţi esenţiale pentru ca o mulţime ordonată să poată fi numită continuă. Numerele raţionale formează o mulţime densă, dar nu completă; numerele întregi formează o mulţime completă care nu e densă; numerele reale formează o mulţime completă şi densă.

Se pune însă întrebarea: de ce e nevoie să-l definim pe $\sqrt{2}$ ca tăietură a corpului raţional şi nu ne mulţumim să-l vedem ca pe un număr (cu o infinitate de zecimale) care, ridicat la pătrat, dă ca rezultat numărul 2? Nu se exclude posibilitatea de a exprima un număr iraţional ca şir (neperiodic) de infinite cifre, nici chiar posibilitatea de a-l defini, în cazuri particulare, ca numărul care, ridicat la o anumită putere, dă ca rezultat un număr întreg. Dar în spatele conceptului de *tăietură* stă în primul rând ideea de *raport* între două mărimi: $\sqrt{2}$ şi π sunt, respectiv, raportul dintre diagonala şi latura unui pătrat şi dintre circumferinţă şi diametrul său, iar Dedekind se referă explicit la teoria rapoartelor a lui Eudoxos-Euclid; a spune că acest raport corespunde

unui număr irațional înseamnă că el nu se poate exprima ca raport între numere întregi (*Elementele*, X, 7).

Așadar, pentru a înțelege ce e un număr irațional trebuie să știm ce e un raport, adică ce semnificație are relația dintre două mărimi care se exprimă cu semnul $\leq : \geq$. Pentru definirea raportului, avem la dispoziție două teorii pe care ne putem baza: aceea a lui Eudoxos-Euclid, datând din 350 î.Cr. (*Elementele*, V, Def. 5), la care se referă și Dedekind, și aceea pe care o amintește Aristotel când se referă la teoria geometrică a asemănării (*Topica*, 158 b 29 și urm.):

> Se pare însă că și în matematică unele teoreme de geometrie nu sunt ușor de demonstrat din cauza lipsei definiției; de exemplu, teorema că dreapta care taie planul paralel la o latură (a unui paralelogram) împarte deopotrivă (*homoíos*) linia și suprafața. Dar, dacă s-a formulat definiția, teorema devine de îndată evidentă, căci liniile și suprafețele suferă aceeași scădere (*antanaíresis*). Aceasta este tocmai definiția „aceleiași proporții"* [116]

Analiza cazului diagonalei și laturii unui pătrat arată că *antanaíresis* constă într-un proces de operații elementare de măsurare care se reduc de fiecare dată la scăderea unei mărimi dintr-o alta. A măsura o mărime x cu o alta, y, mai mică, pe care o considerăm unitate de măsură, nu înseamnă altceva (Bernhard Riemann observase asta încă în 1854[117]) decât *suprapunerea* unei mărimi pe o alta și fixarea numărului q care spune de câte ori intră mărimea mai mică y în aceea mai mare x (aici q are rolul câtului). Dacă rămâne un rest r diferit de zero (dar mai mic decât y), operația de măsurare se repetă asupra lui y și r, adică se numără de câte ori e conținut r în y. Dacă mărimile sunt incomensurabile, procesul se repetă indefinit pentru că nici un rest nu e nul. Asta înseamnă, la modul cel mai propriu, a *împărți* mărimea x la mărimea y. S-a văzut mai târziu cum, cu câturile q obținute în timpul acestui

* Cf. Aristotel, *Organon*, vol. IV, Ed. Științifică, București, 1963, p. 234, trad. Mircea Florian. (*N. t.*)

proces, se poate construi *fracția continuă* care *definește* numărul irațional corespunzător raportului dintre mărimile incomensurabile *x* și *y*.

Fenomenul critic care apare legat de conceptul de tăietură e deci următorul: cu *antanaíresis* se construiesc în pași succesivi, cu ajutorul numerelor *q* care stabilesc de câte ori e conținută o mărime în alta, fracții numerice *m:n* a căror valoare e, alternativ, mai mare sau mai mică decât raportul *x:y*.[118] Altfel spus, *antanaíresis* e folosit la definirea a două șiruri *A* și *B* de fracții numerice, unul crescător și celălalt descrescător, astfel ca fiecare fracție din *A* să fie mai mică decât raportul dintre *x* și *y*, în timp ce fiecare fracție din *B* să fie mai mare. Fracțiile din *A* sunt aproximații prin lipsă, acelea din *B* aproximații prin exces ale aceluiași raport *x:y*.[119] Acum putem decripta definiția euclidiană de egalitate a rapoartelor dând rapoartelor numerice *m:n* care intervin în definiție aceeași semnificație pe care o au rapoartele numerice construite cu ajutorul *antanaíresis*-ului. Egalitatea a două rapoarte de *mărimi* va fi decisă pe baza relației de ordine (<, >, sau =) în care se află acele rapoarte cu rapoartele dintre numere; dar dacă vrem să atribuim acestor rapoarte o existență reală, atunci trebuie să le gândim ca rezultate ale unor procese de calcul folosind *antanaíresis* sau altă procedură cu un grad rezonabil de eficiență.

Atunci când Simone Weil, într-o scrisoare către fratele ei André, sugerează că descoperirea incomensurabilității nu a fost doar o dramă, ci și un motiv de fericire, e cazul să ne gândim la calculabilitatea rapoartelor numerice: e posibil „să vedem că și ceea ce nu se *definește* cu ajutorul numerelor e tot un raport"[120] deoarece absența unei definiții cu numere e totuși susținută de proceduri care calculează aproximații numerice prin exces și prin lipsă.

Cu siguranță, uriașenia infinității continuului nu e epuizată de procedurile care aproximează mărimile cu rapoarte numerice, adică nu e epuizată de mulțimea numerelor calculabile care, după cum a demonstrat Turing în 1936, e doar numărabilă;[121] dar complexul acelor proceduri permite apropierea de uriașenia *ápeiron*-ului

fără a pierde ireparabil limita și unitatea. În *Enneade*, VI, 6, 3, Plotin spune: „dacă te apropii de ea [nemărginirea] fără să-i arunci o limită ca un năvod, îți va scăpa și nu vei găsi nimic unitar. Căci altminteri deja ai delimitat-o!". Începând cu tradiția orfică și pitagoreică, cu atomiștii și cu Platon, până cel puțin la Nicomachos, numerele întregi și rapoartele dintre ele erau elementele constitutive, adevăratele noduri ale acestei plase.

Atunci când Russell și Whitehead, în *Principia Mathematica* (1910–1913), au încercat să definească matematica prin intermediul logicii și, în particular, au încercat să definească un număr irațional folosind clase, ei au avut în minte mai ales conceptul de tăietură Dedekind. La fel va face mai târziu Quine,[122] luând ca model definiția elaborată în *Principia*. Semn indubitabil că teoria lui Dedekind și teoria lui Euclid se potriveau foarte bine pentru fundamentarea unei teorii a numerelor reale în termeni pur logici. O explică amănunțit Russell în *Principles of Mathematics* (par. 259 și 261). Viziunea lui Russell pleacă de la o teorie a cuantificatorilor universali și existențiali bazată pe folosirea unor termeni ca *toți a, unii a, orice a, există un a*, care reduce cunoașterea numerelor reale la o logică de funcții propoziționale și, în definitiv, la un sistem de aserțiuni care se pot deduce formal plecând de la o mulțime de axiome. Cu toate acestea, logica cuantificatorilor e susținută de ideea *matematică* de tăietură și de schemele algoritmice care, la rândul lor, au precedat-o și au justificat-o (par. 60).[123]

Cât de mult răspunde conceptul de tăietură ideii noastre intuitive de număr? În anumite aspecte ale ei, teoria lui Dedekind e contraintuitivă: nu pare natural să concepem un număr ca pe o mulțime caracterizată de o structură relativ complexă, așa cum e tăietura. Acesta e motivul pentru care Dedekind găsea oportun ca, în cazul în care tăietura nu corespunde unui număr rațional, să *creeze* o entitate nouă, un număr irațional α, unde α era un simbol care nota perechea de clase A și B. Astfel, creațiile lui Dedekind erau afine celor ale lui Cantor. Iată ce-i scria Dedekind lui Heinrich Weber, în 1888:

E exact aceeaşi problemă în legătură cu care dumneata zici că numărul iraţional n-ar trebui să fie altceva decât tăietura însăşi, în timp ce eu prefer să fie creat ca ceva *nou* (diferit de tăietură) care să corespundă tăieturii şi care să *producă* tăietura. Avem dreptul să ne atribuim această putere de a crea şi e mult mai nimerit să procedăm aşa pentru a putea trata toate numerele în acelaşi fel. Şi numerele raţionale *produc* tăieturi, dar sigur că nu mă gândesc să identific numerele raţionale cu tăieturile pe care le *produc*.[124]

Aici accentul cade pe *a produce* (*hervorbringen*), capacitate atribuită unor proprietăţi intrinsece ale numerelor. Numerele *generează* tăieturile graţie unui fel de putere, unei *dýnamis* care ne duce cu gândul la tezele din *Sofistul* lui Platon (247 d) şi care, din acest motiv, le califică drept entităţi actuale şi eficace. De aici se naşte realitatea numerelor, din capacitatea lor de a impune noi linii de gândire care, la rândul lor, anunţă noi concepte. Libertatea de a crea concepte pare să se potrivească unei necesităţi stringente, iar realitatea apare de fiecare dată când ne supunem necesităţii.

Teoria lui Dedekind răspundea criteriului *completitudinii*: părea să se refere cu evidenţă la conceptul nostru intuitiv de continuu, fără să răspundă totuşi unui criteriu de gradualitate. Alături de *densitate*, aşa cum am mai spus, completitudinea caracterizează continuul numeric al numerelor reale şi e sinonimă din punct de vedere tehnic cu absenţa golurilor: excluzând din domeniul numerelor tăieturile care reprezintă numerele iraţionale, s-ar introduce goluri a căror prezenţă nu poate fi admisă într-o mulţime continuă.[125]

Şi pentru Cantor semnul care notează şirul fundamental era introdus printr-un act de creaţie, nu una arbitrară, ci dictată de *necesitatea*[126] unei extinderi a corpului numerelor raţionale. Noţiunea de număr de elemente ale unei mulţimi are o reprezentare obiectivă imediată, susţinea Cantor şi „relaţia dintre numărul de elemente ale unei mulţimi şi număr în sine demonstrează *realitatea* acestuia din urmă chiar atunci când e infinit".[127] Cu teoria lor a continuului numeric, Cantor şi Dedekind răsturnau teza kantiană a priorităţii

intuiției spațiului și timpului pentru matematică: conceptul de continuu era mai primitiv și decât timpul, și decât spațiul, și era fundamentat esențialmente pe ideea de număr și de clasă.[128] Mai exista o împrejurare care confirma realitatea noilor numere: făcând abstracție de o necesară precizare a așa-numitei proprietăți arhimediene a unui corp de numere,[129] teoria continuului a lui Dedekind e echivalentă cu aceea a lui Cantor. A afirma că un corp de numere K e arhimedian și astfel încât orice șir fundamental are o limită în K e echivalent cu a afirma că în K orice tăietură Dedekind e generată de un element s din K.[130]

În ultimele decenii ale secolului XIX, totul pare să conveargă înspre afirmația că numerele sunt entități reale. În cursul unei corespondențe cu Cantor, Charles Hermite mărturisea că numerele întregi păreau să formeze o lume de realități care există în afara noastră, cu același caracter de necesitate al realităților naturale care se oferă simțurilor noastre. Pentru Cantor, realitatea numerelor – întregi, raționale, iraționale și transfinite – se baza, dincolo de o evidență concretă, pe însuși adevărul Scripturilor. Acestea păreau să mărturisească despre o cunoaștere divină a numerelor infinite: Augustin explica acest lucru în *Despre cetatea lui Dumnezeu*, XII, 19, ceea ce pentru Cantor devenea un sprijin în favoarea teoriei sale matematice a infinitului actual. Identitatea dintre număr și înțelepciune, proclamată de Augustin, era decelabilă, prin litotă, și în psalmul 146, 4-5, care îl slăvește pe „Cel ce numără mulțimea stelelor și dă tuturor numele lor", nu altul decât Domnul „a cărui pricepere nu are hotar (*tês sunésos autoû ouk ésti arithmós*)". Pentru stăpânul universului, nota Augustin, infinitatea numărului nu era incomprehensibilă, „chiar dacă nu există o numărătoare a infinității numerelor" (*Despre cetatea lui Dumnezeu*, XII, 18).

La finele secolului XIX, ideea de tăietură circula și printre matematicienii italieni. Ulisse Dini, mai ales, a pus-o la temelia teoriei sale a funcțiilor reale. Dini își luase sarcina de a elabora o teorie *aritmetică* a continuului, exact precum Cantor și Dedekind,

independentă de geometrie şi de orice presupoziţie bazată pe intuiţia spaţiului şi a timpului. Teoria sa e întru totul analoagă celei a tăieturilor – într-adevăr, Dini şi Dedekind se citează reciproc. Şi pentru Dini cele două clase care individualizează un număr iraţional, una în ordine crescătoare, cealaltă în ordine descrescătoare, sunt constituie din numere care

> se apropie indefinit unul de celălalt şi de o mărime unică şi bine determinată a cărei *existenţă* e cunoscută *a priori*, dar nu poate fi atinsă niciodată doar considerând mărimi corespunzătoare numerelor raţionale din cele două clase, şi care marchează graniţa dintre mărimile acestor clase; aşadar, dacă şi acestei mărimi i se va atribui un număr corespunzător, acest număr nu va fi raţional, ci lui îi va corespunde [...] efectiv ceva real, deoarce lui îi corespunde o mărime cu existenţă proprie şi adevărată, şi care, chiar dacă nu poate fi atinsă trecând numai prin mărimile corespunzătoare numerelor raţionale, e astfel făcută încât să ne putem apropia de ea oricât de mult vrem.[131]

Dini se referă în repetate rânduri la existenţa reală a numerelor pentru a indica faptul că acestea nu sunt doar ficţiuni şi că *simbolurile* cu care sunt notate, cu unicul scop de a respecta o „simplitate de exprimare"[132], corespund unui fenomen efectiv şi tangibil, chiar dacă, se poate adăuga, de origine necunoscută.

Are loc totuşi un fapt singular. Convingerea că numerele au o coerenţă şi o existenţă reală era atât de puternică, încât a părut plauzibil să li se extragă principiile generale din logica matematică a mulţimilor finite şi infinite. Spre sfârşitul secolului XIX, teoria numerelor a lui Dedekind avea tocmai scopul de a evidenţia o teorie logică a mulţimilor ca premisă a noţiunii intuitive de număr şi a structurii recursive a operaţiilor aritmetice. Numai că această logică a îndrăznit apoi, la rândul ei, să se aventureze dincolo de limitele admise. Ea s-a izbit însă de zidul paradoxurilor, moment în care matematicienii au început să se îndoiască de existenţa claselor. Realismul a eşuat într-un soi de nominalism sceptic care se încredinţa coerenţei unui limbaj logic

derivat din proprietăți esențialmente matematice, cunoscute de secole și perfecționate în teoriile moderne ale continuului.

Se încerca să se obțină totul din principii logice, dar nu e de crezut că realitatea numerelor ar depinde de o logică a cuantificatorilor care se folosește de expresii precum „există x astfel încât $f(x) = 0$" sau „orice x satisface o anumită proprietate P", cu care Russell trata tăieturile Dedekind. Dimpotrivă, reducerea proprietăților matematice la logica funcțiilor propoziționale a impus o viziune nominalistă care a văduvit numerele de realitate, mutând caracterul lor de evidență pe corectitudinea formulelor lingvistice și pe proprietatea de coerență a unui sistem formal.

Russell a elaborat o *teorie a descripțiilor* cu scopul de face literalmente să dispară subiecții gramaticali, reducându-i la „simboluri incomplete" care nu reprezintă nimic în mod direct. Se reușea astfel exorcizarea problemei existenței „hipogrifului" sau a „cercului pătrat", care altfel riscau să fie considerate obiecte plauzibile în limbajul comun. Clasele și numerele nu au scăpat de acest soi de anihilare. Simbolurile care desemnau clase, ca acelea care apăreau în descripții, sunt simboluri incomplete. Contează corectitudinea folosirii lor, dar ele însele nu semnifică nimic: „așadar clasele, așa cum le introducem noi, sunt doar convenții lingvistice sau simbolice, nu obiecte autentice."[133]

Într-un tratat de teoria logică a mulțimilor, Quine declara că sarcina sa constă mai ales în a decide care sunt propozițiile care individualizează o clasă, altfel spus, în termenii unui realism filozofic, „care anume clase există".[134] Dar, până la urmă, orice realism apare ca prea îndrăzneț. În realitate, pentru Quine, clasele nici nu există, formalismul logic nu trebuie decât să-și fixeze întotdeauna obiectivul de a elimina orice folosire explicită a claselor pe care le-ar investiga ca entități reale. Orice fel de cunoaștere reală sfârșește astfel prin a se baza numai pe observația empirică.

Ce anume a provocat această neîncredere în existența numerelor? Criza fundamentelor matematicii, desigur, amplificată în primii ani ai secolului XX, în urma descoperirii paradoxurilor, a

ascuţit suspiciunile deja exprimate de Leopold Kronecker în legătură cu numerele infinite. Cantor abuzase de puterea de abstractizare a matematicianului: aceasta era şi opinia lui Frege, pentru care exista riscul ca abstractizarea să fie utilizată la fel ca o putere magică şi ca numerele transfinite să fie entităţi evocate cu ajutorul unor scamatorii inacceptabile.[135] Descoperirea antinomiilor confirma verdictul matematicienilor care îi atribuiau lui Cantor o pretenţie de atotputernicie nefondată.

E izbitoare totuşi trecerea bruscă de la aserţiunile unor matematicieni precum Dedekind, Cantor sau Dini, orientate către stabilirea realităţii anumitor clase de numere, la deriva nominalistă apărută odată cu logicismul. S-ar zice că acesta din urmă şi-a luat sarcina de a face inofensivă întrebarea jenantă care începuse să se facă auzită la cumpăna secolelor şi a cărei cea mai radicală formulare îi aparţine lui Nietzsche: „[...] întrebarea rămâne deschisă: axiomele logice sunt adecvate realului sau sunt criterii şi mijloace de a *crea* pentru noi realul, conceptul de «realitate»? [...] Pentru a putea face prima afirmaţie, ar fi nevoie totuşi, aşa cum s-a mai spus, să cunoaştem deja fiinţa: ceea ce cu siguranţă nu e cazul. Principiul nu conţine deci un *criteriu al adevărului*, ci un *imperativ* în legătură cu ceea ce TREBUIE să fie *considerat* ca adevărat".[136] De altfel, în acord cu o lungă tradiţie care urcă în timp până la Toma din Aquino, Descartes şi William James, chiar Whitehead şi Russell, în „Introducerea" la *Principia Mathematica*, precizau şi ei că definiţiile au catracter *volitiv*, impus de alegerea a ceea ce apare mai demn de a fi cunoscut. Şi totuşi, în spatele acestei alegeri voite stătea un imperativ încă mai puternic decât cel avut în vedere de Nietzsche: evidenţa acelor fenomene inalterabile şi nemodificabile, consubstanţiale numerelor şi formulelor matematice, care impun opţiunile teoretice cele mai fundamentate şi semnificative.

13
Matematica: descoperire sau invenţie?

Dacă matematica e descoperire sau invenţie e o întrebare recurentă şi atât de des pusă, încât pare să ceară un răspuns critic, o distincţie concluzivă între ceea ce e real şi ceea ce e subiectiv şi arbitrar. Evident că matematica şi logica sunt candidatele naturale cărora o asemenea întrebare le poate fi adresată. În stabilirea axiomelor, în demonstraţia unei teoreme ori în construcţia soluţiei unei ecuaţii, gândul pare să se conformeze realului, iar arbitrariul – necesităţii: un schimb cu caracter nemijlocit şi originar în cursul căruia se încearcă distingerea a doi termeni antitetici în momentul precis în care încep să se combine. Dar combinaţia lor iniţială e deja un ghem de nedescurcat, iar întrebarea „ce a fost mai întâi, arbitrariul sau necesitatea?" rămâne fără răspuns.

Necesitatea introducerii numerelor reale pare în antiteză cu teza susţinută de Dedekind că ar fi vorba despre „creaţii libere ale spiritului uman";[137] dar şi această libertate trebuie să corespundă unor reguli conforme cu ceea ce acelaşi Dedekind numea „legile gândirii", abilitatea congenitală minţii noastre de face legături între lucruri, de a-şi reprezenta un lucru prin altul; o abilitate fără de care nu am putea gândi. Începând din clipa naşterii, exersăm continuu aceste operaţii de legătură şi reprezentare, dar *fără un scop predefinit*. Lanţurile de raţionamente par să se aşeze în mod natural în aşa fel încât sugerează noţiuni aparent simple, dar de fapt foarte complexe, cum e noţiunea abstractă de număr, care se

articulează în generalizări succesive până ajunge la numerele reale sau complexe. Orice teoremă din algebră ori analiză, observa Dedekind, fie ea cât de avansată, se poate exprima ca o teoremă despre numere întregi, dar această împrejurare n-ar trebui să împiedice crearea unor noi entități:

> Nu văd nimic meritoriu – la fel gândea și Dirichlet – în a practica întruna această obositoare circumlocuțiune și în a folosi și a recunoaște cu insistență nimic altceva decât numerele raționale. Dimpotrivă, cel mai mare și avantajos progres în matematică și în alte științe a constat invariabil în crearea și introducerea de concepte noi, devenite *necesare* prin apariția frecventă a unor fenomene complexe care doar cu mare dificultate puteau fi controlate de vechile noțiuni.[138]

Nu foarte diferite erau argumentele lui Poincaré pentru a justifica o definiție aritmetică a continuului. Așadar rațiunea care ne împinge la noi creații nu depinde de liberul arbitru, ci de frecvența cu care apar în mod obiectiv fenomene complexe pe care e convenabil să le desemnăm cu concepte noi. Dar realitatea încorporată în ceea ce se lasă desemnat de aceste concepte se dezvăluie mai cu seamă în *capacitatea de a le produce*. Ne întoarcem astfel la sentința din *Sofistul* lui Platon (247 d-e), potrivit căreia „entitățile nu sunt altceva decât putere de a produce", și la matematica din *Śulvasūtra*, tratatele vedice care aveau, ca una dintre principalele probleme, producerea unor șiruri de figuri la scară crescătoare. Ideea aceasta apare de mai multe ori în opera lui Dedekind: numărul produce tăietura în cadrul aritmetic la fel cum punctul corespunzător o produce pe dreapta geometrică.[139]

Aceeași teză – existența numărului care generează tăietura corpului numerelor raționale – apare în matematica lui Karl Weierstrass. În notele de curs luate de Salvatore Pincherle e descris modul în care se poate stabili o legătură între numere și punctele de pe o dreaptă geometrică. Fixăm originea O; apoi, pentru a asocia unui segment OB de pe dreaptă un număr, măsurăm OB cu o unitate dinainte fixată OA printr-un procedeu analog lui *antanairesis*

sau algoritmului euclidian care permite calcularea unui număr *a*, astfel ca OB = *a*OA – aici *a*, numărul asociat lui OB, poate fi raţional sau iraţional. Invers, pentru a asocia fiecărui număr finit şi bine determinat *a* un segment OB al dreptei, de măsură *a*, va trebui să-l concepem pe B ca punct de separaţie între două clase de puncte, corespunzătoare numerelor mai mici şi, respectiv, mai mari decât *a*. O idee analoagă celei a lui Dedekind, chiar dacă nu explicit orientată către definirea numărului real ca tăietură. Când precizează conceptul de egalitate între două numere (raţionale sau iraţionale), Weierstrass reia un raţionament asemănător cu acela care serveşte definirii egalităţii a două rapoarte în teoria lui Eudoxos-Euclid (*Elementele*, V, Def. 5), raţionament folosit şi de Dedekind pentru definirea conceptului de continuitate numerică.[140]

Pentru definirea continuului aritmetic, decisivă s-a dovedit ideea de a desemna numerele care produc tăieturi cu simboluri. Cu ajutorul simbolurilor, nota Whitehead, în cursul unui raţionament suntem capabili să efectuăm tranzacţii aproape mecanice, tranzacţii care altfel ar fi avut nevoie de cele mai complexe procese neuronale. Nici nu trebuie cultivat obiceiul de a gândi de fiecare dată la ceea ce facem. Dimpotrivă, e adevărat contrariul, deoarece progresele apar adesea din „multiplicarea numărului de operaţii importante pe care le putem efectua fără a ne gândi la ele".[141]

În celebra sa lucrare din 1940, *Apologia unui matematician*, Godfrey H. Hardy înfrunta fără nici o ezitare tema realităţii matematicii într-un mod definit chiar de el însuşi ca dogmatic, pentru a evita orice neînţelegere. Spunea că el crede, la fel cu majoritatea matematicienilor, într-o *realitate matematică* diferită de aceea fizică, dar asupra naturii căreia nu există un acord: unii susţin că ar fi mentală, şi că noi înşine am fi cei care o construim, alţii sunt siguri că e vorba despre o lume exterioară, independentă de noi. O definiţie acceptabilă a realităţii matematice, observa el, ar ajuta cu siguranţă la rezolvarea problemelor metafizice, iar dacă ar veni odată cu o explicaţie a realităţii fizice, atunci toate problemele ar fi rezolvate. Hardy îşi expunea convingerile în mod lapidar:

> Cred că realitatea matematică există în afara noastră, că sarcina noastră e s-o descoperim şi s-o *observăm* şi că teoremele pe care le demonstrăm, şi pe care le numim pompos „creaţii" ale noastre, nu sunt decât adnotări ale observaţiilor pe care le facem. E viziunea susţinută, într-o formă sau alta, de mulţi filozofi importanţi, începând cu Platon, aşa că voi folosi limbajul care se impune în mod firesc cuiva de aceeaşi opinie.[142]

Nenumărate dovezi şi mărturii ne asigură că entităţile create de matematician, de îndată ce se prezintă cu forţa evidenţei, dezvăluie un tărâm necunoscut în care orice *descoperire* e departe de a putea fi considerată, asemenea respectivelor entităţi, un produs al liberului arbitru. E însă aproape sigur că nici măcar primul act de creaţie nu a fost lipsit de un fel de intrinsecă necesitate care ne obligă să-l considerăm drept o descoperire mai degrabă decât o invenţie. Definiţiile numerelor reale propuse la sfârşitul secolului XIX fac parte dintr-un unic lanţ de idei ale cărui raţiuni sunt cuprinse într-un complex de proprietăţi ale numerelor şi ale raporturilor dintre ele observate deja în epoci îndepărtate. Aceste proprietăţi sunt orientate punctual pentru a impune numerelor exact acele definiţii şi nu altele. În ele sunt cuprinse tema creşterii şi studiul măririi figurilor, preocupări ale matematicii antice care ne permit să întrezărim ceea ce va deveni tema centrală a calculului numeric modern: creşterea numerelor ca fenomen critic pentru stabilitatea calculului digital.

14
De la continuu la digital

Dedekind afirma că din presupunerea că spațiul are o existență reală nu rezultă și continuitatea lui, pentru că multe dintre proprietățile sale ar rămâne neschimbate și dacă ar fi discontinuu.[143] Realitatea matematică a spațiului era deci independentă de existența numerelor iraționale: crearea lor, ca tăieturi ale corpului numerelor raționale, se întemeia pe o realitate deja formată și recunoscută care, în mod evident, se baza pe numerele întregi și pe rapoartele lor, adevăratul antidot pentru non-ființa infinitului, pentru absența structurii încorporate în *ápeiron*.

Deslușim în vorbele lui Dedekind un fel de justificare *ante litteram* a tezelor celor mai intransigenți matematicieni constructiviști, ca Leopold Kronecker sau Henri Lebesgue, pentru care analiza era posibilă și fără mulțimile de numere de putere superioară numărabilului (cum sunt numerele reale). Era o premisă pentru a gândi continuul nu atât ca o completare a discretului, cât ca o extrapolare a sa, esențialmente ireală, impusă de un proiect de simulare a ceea ce ne apare intuitiv în cursul experienței noastre comune – un spațiu și o materie pline, fără salturi și lacune. Dar nu era oare compromis acel proiect de nevoia noastră irepresibilă de *gradualitate*, adică de ideea unui continuu conceput ca „liberă devenire"[144] mai degrabă decât ca o alcătuire de entități deja realizate?

La fel ca Dedekind, Kronecker concepea numărul irațional drept produs al unei împărțiri a numerelor raționale în două clase, deci ca o tăietură, dar un număr ca $\sqrt{2}$ nu era decât un semn bun pentru a desemna această împărțire. Henri Poincaré (*Știință și ipoteză*) se întreba dacă nu cumva pentru a fi suficient de satisfăcuți de o teorie matematică a continuului nu ar trebui să *uităm* originea acestor semne. Dar e posibil ca întreaga cunoaștere matematică să se bazeze pe o asemenea excludere?

Suntem obișnuiți să gândim discretul ca pe o aproximație a continuului, în sensul că numerele iraționale se aproximează cu șiruri de numere raționale. Dar de ce nu am răsturna rolul termenilor, de ce să nu gândim, dimpotrivă, continuul ca aproximând discretul? Ce cunoaștem cu adevărat sunt numerele întregi și rapoartele lor pe care le numim numere raționale; cunoașterea pe care o avem despre realitate pe aceste numere se bazează, toate calculele sunt raționale și poate că nu e nevoie să ne prelungim cunoașterea la numere care, chiar dacă umplu golurile dintre numerele raționale, ar putea să nu fie esențiale în operațiile efective ale unui calculator uman sau digital.

O critică radicală a atomismului implicit în teoria continuului aritmetic găsim în paginile ultimului Nietzsche, chiar dacă e o critică mutată în domeniul fizic:

> În felul lor, fizicienii cred într-o „lume adevărată": un sistem atomic fix, egal pentru toate ființele, cu mișcări necesare – astfel că, pentru ei, „lumea aparentă" se reduce la latura, accesibilă oricui în felul său, a existenței universale și universal necesare. [...] Dar se înșală: atomul pe care-l postulează ei provine din logica punerii în perspectivă a conștiinței, fiind astfel, la rândul său, o ficțiune subiectivă. Imaginea lumii schițată de ei nu e căutuși de puțin diferită, în mod esențial, de imaginea subiectivă a lumii: e doar construită cu simțuri mai dezvoltate, dar tot cu simțurile *noastre*. [...] Până la urmă, nu și-au dat seama că au neglijat ceva din constelație: tocmai necesara punere în perspectivă, în virtutea căreia orice centru de forță – și nu doar omul – construiește tot restul lumii plecând de la sine, adică o măsoară, o modelează, o formează potrivit forței sale

[...]. În „ființa adevărată", ei au uitat să socotească această forță care *pune* perspective [...].[145]

Plângerea de principiu enunțată de Nietzsche era un semn al vremii sale și prindea un aspect tipic al modernității. Evident că ea nu aducea atingere scopului de a elabora un model matematic al continuului intuitiv, acea alcătuire granulară pe care, pe bună dreptate, Poincaré o deslușea în teoriile lui Cantor și Dedekind. Dar putea măcar să mai știrbească din autoritatea acelei teorii, redimensionându-i pretenția de a stabili că există *în realitate* ceva care se poate numi tăietură, număr irațional, atom sau punct. Ceea ce Cantor, Dedekind și Poincaré considerau a fi aproape o constrângere, necesitatea peremptorie de a adăuga sensibilității – și amplificatoarelor sale furnizate de instrumentele de măsură din ce în ce mai perfecționate – cunoașterea directă a unei „lumi adevărate", chiar dacă invizibile, se putea acum transforma într-un fel de sciziune sau de dublă sensibilitate, într-o tensiune problematică între o mai radicală pretenție de efectivitate și o abstracțiune la limita ficțiunii subiective.

Pentru Hilbert, abstracțiunile matematice și ficțiunile cu care gândim infinitul (printre ele, chiar continuul aritmetic) trebuie să aibă o bază în realitate, urmare a unei „armonii prestabilite".[146] Acum însă, o critică și mai stringentă venea chiar dinspre matematică: paradoxurile teoriei mulțimilor, începând cu celebra antinomie pe care Russell i-a comunicat-o lui Frege în 1902, au pus sub semnul întrebării existența ca atare a claselor și i-au îndemnat pe matematicieni să caute noi fundamente și noi puncte de sprijin.

Unele clarificări au venit din relativa ușurință cu care se puteau desluși cauzele anumitor paradoxuri. Celebrul paradox al lui Richard, în particular, era consecința unui act mental aparent legitim: punerea laolaltă într-o clasă unică a tuturor numerelor care se pot descrie, într-o limbă fixată, cu un număr finit de cuvinte (finite). Dar o asemenea clasă nu există, comentase Émile Borel în 1908, pentru că nu e de ajuns să atribui unei mulțimi de cuvinte atributul „finit" pentru a asigura existența efectivă a entității pe

care o descriu acele cuvinte. Atunci, *finit* ar trebui să fie, la modul cel mai propriu, un *proces* de calcul care, pornind cu o mulțime de date, ar fi capabil să elaboreze, într-un număr limitat de pași, un anume rezultat. Borel nota că existența unei entități matematice poate fi garantată de construcția sa efectivă. Rădăcinile reale ale unei ecuații algebrice, de exemplu, pot fi calculate cu o procedură care determină cifrele zecimale până la precizia dorită. Ce garanta deci existența acestor rădăcini era un *algoritm*.[147] Nu întâmplător a fost considerat Borel inițiatorul studiului sistematic al algoritmilor, în zorii unui secol care avea să edifice o știință a calculului bazată tocmai pe conceptul de algoritm și pe folosirea sistematică a procedurilor numerice și informatice.[148] În același an, 1908, Zermelo publica un studiu asupra bunei ordonări a mulțimilor care trebuia să le asigure constructibilitatea la adăpost de paradoxuri. Puțin după aceea, John von Neumann a pus la punct o teorie echivalentă.[149]

În primii ani ai secolului trecut, intuiționismul matematic a criticat și el teoriile continuului numeric, dar din motive care nu derivau direct din urgența rezolvării paradoxurilor. Criteriul fundamental al intuiționismului era să admită ca existente și reale doar entitățile care erau efectiv construibile. Aritmetica numerelor raționale era deci la adăpost de critica intuiționistă, pentru că teoriile lui Peano și Dedekind justificaseră suficient existența numerelor întregi naturale, garantată de construcția lor efectivă cu ajutorul adunărilor succesive ale unității. În plus, Dedekind, cu teorema de recursivitate, sau de definire prin inducție, demonstrase că operațiilor comune ale aritmeticii li se poate atribui o existență coerentă și efectivă și că, în plus, conceptul de calculabilitate se bazează pe cel de enumerare, adică pe seriile de numere naturale. *Existența* unei operații precum suma se rezuma la ideea că se pot aduna efectiv, într-o serie finită de pași, două numere naturale oarecare, de exemplu 3+5 = 8 sau 346+512 = 858, în general $n+m$ pentru orice pereche de întregi naturali n și m. Ideea fundamentală era cea de *închidere*; în ea se putea citi un fel de

control al *creşterii* numerelor şi mărimilor, problemă pusă deja în matematica antică. Trecerea de la un număr la succesivul, adăugând o unitate, sau adunarea ori multiplicarea a două numere naturale, indiferent cât de mari, păstra întotdeauna rezultatul într-un acelaşi domeniu, acela al numerelor naturale, care, din acest motiv, era numit *închis*. Trebuie însă să semnalăm un pas critic: chiar admiţând că proprietatea de închidere servea înlăturării pericolului creşterii numerelor, Dedekind nu era conştient încă de problema instabilităţii calculului – or, aceasta avea să se dovedească cea mai insidioasă consecinţă a acelei creşteri. Foarte curând nu va mai fi de ajuns să ne asigurăm că, oricât de mult ar creşte, numerele aparţin întotdeauna aceluiaşi domeniu.

Şi mai complex decât numerele naturale şi raţionale era totuşi, cel puţin în plan teoretic, cazul numerelor reale, pentru că definiţia lor implica introducerea unor clase infinite de numere şi folosirea sistematică a cuantificatorilor existenţiali şi universali, adică folosirea unor propoziţii de tipul „există un x care satisface proprietatea P" sau „pentru orice x e verificată proprietatea P". Şi chiar dacă analiza clasică, bazată pe conceptul de număr real, nu părea compromisă de descoperirea antinomiilor, ea era totuşi expusă criticilor şi rezervelor din partea celor care, asemenea intuiţioniştilor, nu admiteau entităţi matematice, numere, mulţimi sau funcţii care nu erau efectiv calculabile.

Odată stabilite regulile de calcul cu numere raţionale, numerele reale erau definite ca şiruri fundamentale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de numere raţionale care, reamintim, satisfac proprietatea: dat un număr ε, oricât de mic, *se poate găsi* un număr natural k, care depinde de ε, pentru care distanţa dintre a_{n+p} şi a_n, pentru $n>k$, e mai mică decât ε pentru orice număr natural p. Dar ce înseamnă de fapt *se poate găsi*? Matematica intuiţionistă admite doar cazul în care *se poate* indica faptul că e posibil să calculăm efectiv indicele k pentru care distanţa dintre a_{n+p} şi a_n e mai mică decât ε dacă $n>k$, adică dacă există o procedură cu care se calculează acea valoare critică k.[150] Observaţia aceasta simplă, de care Brouwer şi

intuiționiștii s-au folosit pentru a ataca analiza clasică, era suficientă pentru lipsi de realitate conceptul de număr atomic pe care se bizuise Cantor ca să dea coerență realității continuului matematic. Desemnarea șirului fundamental cu un simbol nu era de ajuns pentru a conferi realitate numărului corespunzător acelui simbol, în lipsa posibilității de a calcula indicele k pentru care distanța dintre a_{n+p} și a_n devine arbitrar de mică pentru n mai mare decât k.

Pentru matematicienii intuiționiști, calculul efectiv avea fundamente teoretice foarte îndepărtate de concretețea cerută de o știință a algoritmilor orientată spre rezolvarea problemelor aplicative în cel mai eficient mod posibil. Brouwer considera matematica drept o acțiune a cărei realitate se bazează pe cunoașterea și pe intuiția unei multiplicități de senzații care se dezvoltă în timp. Construcția intuiționistă a unui număr real, concepută ca definiție graduală, în timp, a unor intervale din ce în ce mai mici care-l conțin, nu avea nici măcar materialitatea calculului lui Turing, Kleene sau von Neumann. Îi revenea matematicii computaționale teoretice și aplicate exigența construcției conform unor criterii mai severe de eficiență.

Necesitatea de a micșora în mod efectiv, prin intermediul unei proceduri, distanțele dintre aproximările din vecinătatea limitei nu răspunde doar problemei teoretice a definirii unui număr irațional. E implicită în acest demers necesitatea unei conștientizări de tip nou a finalității matematicii. Știința matematică trebuie să se poată orienta în două direcții opuse: dinspre concret spre abstract, dar și dinspre abstract spre concret – și nu e deloc sigur care dintre cele două direcții răspunde mai bine tendințelor sale profunde. Într-adevăr, sunt cel puțin patru domenii de cercetare care indică extrema atenție cu care matematicienii au privit de-a lungul secolelor relația pe care o întrețin teoriile lor cu lumea reală, fie ea materială sau invizibilă: doctrina numerelor-puncte a pitagoreicilor și a atomiștilor antici, fizica matematică, teoria numerelor reale și știința calculului bazată pe conceptul de algoritm.

După cum observa Giuseppe Peano, finalitatea matematicii constă, în bună măsură, în calcularea cifrelor numerelor care sunt soluții ale ecuațiilor ce simulează cele mai diverse fenomene din natură: „Scopul Matematicii e determinarea valorii numerice a necunoscutelor care apar în problemele practice. Newton, Euler, Lagrange, Cauchy, Gauss și toți marii matematicieni își dezvoltă minunatele lor teorii până la calculul cifrelor zecimale necesare".[151] Or, matematica își poate realiza această sarcină doar dacă e orientată și spre concret, nu doar spre abstract. Ecuațiile diferențiale și integrale și problemele de minim în care se exprimă modelele matematice ale fenomenelor naturale și artificiale își au originea în situații concrete din fizică, economie sau informatică, iar natura condițiilor care se impun valorilor la frontieră și valorilor inițiale ale funcțiilor necunoscute e întotdeauna motivată de *realitatea fizică* simulată. Pe de altă parte, matematica nu se limitează la găsirea ecuațiilor care definesc aceste modele. Trebuie satisfăcute cerințele care permit elaborarea unei soluții și foarte rar o asemenea soluție se poate exprima cu o formulă analitică, după cum la fel de improbabil e și ca o astfel de formulă, dacă există, să fie utilă la găsirea soluției unei ecuații în termeni de pură informație digitală.

De obicei, atunci când există, soluțiile scrise în formă analitică sunt foarte complicate. În plus, o formulă analitică trebuie să satisfacă o condiție de stabilitate: la variații mici ale datelor trebuie să corespundă variații mici ale rezultatului, altfel informația transmisă de model riscă să fie complet distorsionată. Condiția aceasta nu e mereu satisfăcută – i se datorează lui Jacques Hadamard un exemplu de problemă cu valori inițiale a cărei soluție nu depinde continuu de date. E atunci de ajuns ca acestea să fie afectate de o eroare minimă pentru a nu avea nici o informație utilă despre soluția problemei. Problemele de acest fel au fost numite „greșit puse".[152]

Cererea ca soluția unei anumite ecuații să existe și să fie unică, și ca problema să fie bine pusă, se conformează unei concepții

clasice din fizica matematică, dominată cum era de presupunerea că un eveniment fizic care evoluează în mod stabil e bine determinat de condițiile inițiale ori de cele la frontieră.

> Viziunea lui Laplace despre posibilitatea de a calcula întreg viitorul lumii fizice pornind de la o mulțime exhaustivă de date despre starea actuală e o expresie extremă a acestei orientări. Totuși, acest ideal rațional de determinism matematic bazat pe ideea de cauză s-a erodat treptat, prin contactul continuu cu realitatea fizică. Fenomenele neliniare, teoria cuantică și apariția puternicelor metode numerice au arătat că problemele „bine puse" sunt departe de a fi singurele care reflectă fenomenele reale.[153]

Nu e însă de ajuns să ne asigurăm că soluția analitică, presupunând că există, e continuă în raport cu datele. În realitate, modelarea matematică comportă mai multe stadii: formula modelului trebuie aproximată, de regulă, cu o formulă aritmetică, iar aceasta trebuie să poată fi tradusă, cu ajutorul unor proceduri numerice, în pur calcul digital. În cazul cel mai frecvent, când modelul diferențial se aproximează cu unul pur aritmetic, cum ar fi un sistem de ecuații algebrice liniare, avem de examinat sensibilitatea modelului simplificat la erorile în privința datelor și, de asemenea, stabilitatea procesului care-i calculează soluția numerică. În fine, calculul presupune o mulțime enormă de operații elementare și foarte multe subprograme care constituie o elaborare *ascunsă* la care nu avem acces, dar pe care se bazează în foarte mare măsură gradul de încredere pe care îl putem avea într-un proces computațional. Ceea ce observa și Beresford Parlett în 1978:

> Astăzi, o mare parte dintre calculele cu detalii dintre cele mai complicate sunt *oculte*. Asta înseamnă că utilizatorul uman nu vede nici datele, nici rezultatul. Într-un proces de calcul uriaș, datele utile unui program secundar (cum ar fi o transformată Fourier) sunt generate de un anumit program, iar rezultatele sunt imediat folosite pentru un altul. E o caracteristică a unei analize numerice introvertite. [...] Algoritmii pentru calculul ocultat ar trebui să fie mult mai siguri decât aceia care produc

rezultate ce vor fi văzute de ochiul uman. Timpul de execuție pare să fie mai puțin important, dar încrederea și eficiența sunt esențiale. În orice caz, până la ce punct pot fi ambele îmbunătățite? Iată o întrebare interesantă.[154]

Spus foarte pe scurt, după Newton și Leibniz, matematica a traversat trei momente cruciale, al treilea dintre ele e încă în curs și ia treptat forma a ceea ce obișnuim să numim *revoluția digitală*. Primei descoperiri, în secolul XVII, a acelei grandioase mașinării analitice căreia i s-a spus analiză infinitezimală, i-a urmat, la sfîrșitul secolului XIX, momentul cunoscut drept *aritmetizarea analizei*, la fel de revoluționar: căutarea fundamentelor analizei în conceptele de număr, de mulțime și de trecere la limită. În număr, fie el rațional, real sau transfinit, se căuta realitatea ultimă, autentica actualitate a finitului ca și a infinitului la care matematica nu încetase nici o clipă să privească. Aici erau și germenii celei de-a treia revoluții: deplasarea de la principiul conform căruia orice raționament se putea reduce la conceptul de număr, la aplicarea unei varietăți de metode pentru calculul unor mulțimi de numere. Algoritmii și listele de numere calculate moșteneau informația din modelele inițiale și o traduceau, sub auspiciile unui autentic reducționism, la un nivel descriptiv diferit și mai elementar. Posibilitatea teoretică de a reduce analiza la număr și la operații de trecere la limită trebuia să se transforme într-o aritmetizare efectivă.

Ultimul pas a fost efectul a două cauze concomitente: criza fundamentelor matematicii, care punea la îndoială posibilitatea folosirii universale a conceptului de mulțime, și surprinzătoarea dezvoltare a științei aplicate, manifestată deja la finele secolului XIX, care a avut ca urmare și dezvoltarea informaticii și a calculului științific la jumătatea secolului XX. Algoritmii au devenit obiect de studiu al informaticii teoretice, dar și, din a doua jumătate a secolului, nucleul teoretic și practic al unei științe a calculului la scară mare care își propunea să traducă problemele fizicii matematice într-un grandios sistem de elaborare digitală.

În cursul acestei a treia faze, de altfel, principiul *realității* s-a deplasat spre ideea de *algoritm*. S-a observat adesea, în acest timp, că matematica nu se poate limita la procedee de abstractizare, ci trebuie să urmeze și direcția opusă, dinspre conceptele abstracte înspre realitatea concretă, înspre *pământ*, ca să spunem așa. Tocmai de la pământ, de la aplicațiile concrete la realitatea fizică urma să-și tragă matematica forța pentru a ieși din *impasul* unei crize a fundamentelor care, altfel, i-ar fi slăbit vigoarea teoretică – întocmai cum povestește legenda lui Hercule și Anteu: uriașul Anteu își trăgea forțele de la mama Geea, iar Hercule a putut să-l doboare doar ținându-l suspendat în aer și ridicându-l de fiecare dată când cădea. Treptat, Anteu și-a pierdut puterile, a fost învins și ucis; dar dacă ar fi rămas legat de pământ, forța sa ar fi biruit.

La un principiu de concretețe făcea apel, în particular, Andrej A. Markov Jr. căruia îi datorăm contribuții importante la formalizarea ideii de algoritm: „Abstracțiunile sunt indispensabile în matematică: totuși, ele nu trebuie urmărite de dragul lor, nici nu e cazul să ne ducă într-un punct de la care să nu mai știm coborî pe «pământ». Ar trebui să privim întotdeauna trecerea de la gândul abstract la practică drept un moment necesar în procesul cunoașterii realității obiective".[155]

În același timp, prin știința algoritmilor, secolul XX a cunoscut chiar și un nou tip de abstractizare, anume abstractizarea *realizabilității virtuale*, studiul teoriilor abstracte care fac posibile procesele de calcul care au loc în spațiul și timpul fizice ale unei mașini. Această nouă abstractizare, nota Andrej A. Markov Jr.,[156] consta, în primul rând, în distanțarea de limitele reale ale posibilităților noastre de construcție pentru a putea începe să le găsim presupozițiile teoretice. Într-o primă etapă, realizabilitatea efectivă trebuia considerată a fi doar virtuală. Într-adevăr, în celebrul său tratat despre funcțiile recursive, Hartley Rogers declara că își pune „întrebări despre existența și non-existența metodelor computaționale, mai degrabă decât întrebări privind eficiența sau proiectarea lor validă."[157] În chiar mașina Turing, descrisă în celebrul

articol din 1937, se putea observa o foarte neobişnuită combinaţie de concreteţe, tipică unui dispozitiv mecanic, şi de absolută abstractizare matematică, conformă unei idei imateriale despre calculabilitate. Realizarea ei practică, folosind proceduri concrete, depindea de disponibilitatea efectivă de suficiente resurse de timp şi spaţiu. De problema aceasta avea să se ocupe, în a doua jumătate a secolului XX, o ştiinţă a algoritmilor având sarcina să măsoare costul computaţional al unei proceduri tocmai în termeni de spaţiu şi timp de execuţie.

15
Creşterea numerelor

În matematica greacă, procesele de aproximare, progresiile numerice şi mărirea (sau micşorarea) figurilor geometrice puneau o serie de probleme privind prelungirea lor la infinit. Dificultăţile se rezolvau atribuind lui *ápeiron* o semnificaţie pur potenţială, ca în metodele de exhaustiune sau în algoritmii iterativi, bazaţi pe aplicarea repetată, la infinit, a unui operator asupra valorii aproximate a soluţiei unei probleme, valoare care se ajustează la fiecare pas. În aceşti algoritmi, numerele calculate creşteau corespunzător creşterii sau descreşterii figurilor şi, cum precizia ar fi cerut numere din ce în ce mai mari, de la un punct încolo calculul ar fi devenit imposibil.

Totuşi, matematica greacă nu cunoştea calculul automat la scară mare, aşa că se raţiona pe numere relativ mici. Doar Arhimede, în *Calculul firelor de nisip*, s-a gândit la felul de a concepe numere foarte mari, cu milioane de milioane de cifre, care ar fi fost de ajuns pentru a număra firele de nisip necesare pentru a umple întreg universul. Dar aceste numere, oricât de mari ar fi fost, nici nu se puteau compara cu infinitul şi, mai ales, nu intrau în vreun calcul real. Aşa că în tratarea lui Arhimede nu găsim nici un fel de preocupare în legătură cu creşterea lor, în timp ce existenţa lor efectivă nu e pusă în discuţie.

Dificultăţi apar chiar şi în procedeele cu un număr limitat de operaţii din ştiinţa modernă a calculului, din pricina cerinţei unui

grad de efectivitate pe care *finitul*, în şi pentru sine, nu e capabil să-l garanteze. În general, natura calculului automat cu numere raţionale de forma p/q, cu p şi q întregi, e problematică – şi asta începând chiar de la cele mai elementare operaţii: de exemplu, cu doar puţine înmulţiri putem produce numere enorme care depăşesc limitele spaţiului alocat memoriei calculatorului.

Apare deci întrebarea: de fapt, cât de mult ne putem apropia cu o fracţie de un număr iraţional dat? Mărirea sau micşorarea figurilor geometrice are o contraparte în creşterea numerelor. E exemplar cazul aproximării rădăcinii pătrate a unui întreg cu metoda iterativă a lui Newton, în care numărul de cifre ale numărătorului şi numitorului fracţiilor aproximante se dublează de fiecare dată, în corespondenţă cu un şir de pătrate construite cu corecţii gnomonice succesive. Cresc, de asemenea, şi numerele laterale şi diagonale, chiar dacă mai încet.

Dar cât de mult are sens să prelungim iteraţia? În principiu, numărătorii şi numitorii fracţiilor pot creşte indefinit, pentru a ameliora cât mai mult posibil aproximarea numărului iraţional. Există totuşi limite obiective pentru distanţa dintre numărul iraţional şi fracţia aproximantă. Printr-o teoremă demonstrată în 1844, Joseph Liouville stabilea o limită teoretică pentru aproximarea unui număr iraţional *algebric*, adică unul care e soluţia unei ecuaţii algebrice, obţinută egalând cu zero un polinom cu coeficienţi întregi: chiar dacă q creşte, eroarea de aproximare, adică distanţa dintre numărul algebric şi o fracţie aproximantă p/q nu scade atât de mult cât ne-am dori sau ne-am aştepta. Teorema lui Liouville are şi implicaţii de altă natură, de la construcţia numerelor transcendente, deci nealgebrice, la măsura vitezei de creştere a numerelor în cursul procesului de aproximare a unui număr algebric. Oricum, preţul apropierii progresive de soluţia problemei e creşterea numerelor.

Mai precis, un număr e *algebric* de gradul k dacă e soluţie a unei ecuaţii algebrice obţinute egalând cu zero un polinom de gradul k, dar nu un polinom de grad mai mic decât k. De exemplu,

numărul $\sqrt{2}$ e algebric de gradul 2 pentru că e soluția ecuației de gradul al doilea $x^2-2=0$ și nu e soluția nici unei ecuații liniare (adică de gradul 1). Teorema lui Liouville afirmă că pentru orice număr algebric x de grad $n>1$, creșterea lui q nu produce efectul de a diminua, dincolo de o anumită limită, distanța dintre x și o fracție aproximantă p/q. Distanța aceasta rămâne mai mare decât $1/q^{n+1}$ pentru numitori q suficient de mari. De exemplu, diferența în valoare absolută dintre un număr irațional definit de rădăcina pătrată a unui întreg pozitiv și fracția sa aproximantă p/q rămâne mai mare decât $1/q^3$ pentru q suficient de mare. Numerele care nu sunt soluții ale nici unei ecuații algebrice, numerele *transcendente*, cum sunt e și π, nu se supun acestei limitări. Există o infinitate nenumărabilă de numere transcendente pentru că numerele algebrice, după cum demonstrează Cantor, formează o mulțime numărabilă, iar numerele reale, care includ și numerele algebrice, și numerele transcendente, formează o mulțime de putere superioară numărabilului. Cu teorema sa, Liouville reușea pentru prima dată să arate cum se pot *construi* numere transcendente. Numerele transcendente ale lui Liouville sunt de forma

$$a=0,a_1a_2000a_3000000000000000a_4000000000000000000000000000000...$$

unde a_i e o cifră zecimală între 1 și 9, iar lungimea grupurilor de zerouri crește foarte repede, cu viteză factorială, adică mai mult decât exponențială. Acum, presupunând că a e un număr algebric de gradul n, dacă se consideră o aproximare b a sa obținută cu un număr suficient (dar care depinde de n) de grupuri de zerouri, se obține o distanță dintre a și b care violează teorema lui Liouville. Așadar a nu poate fi algebric. În acest caz, tocmai creșterea foarte rapidă a lungimilor șirurilor de zerouri demonstrează că a e transcendent.[158]

Cu teorema lui Liouville, folosind un algoritm iterativ, putem chiar măsura viteza de creștere a numitorului fracțiilor care aproximează un anumit număr algebric z: creșterea e cu atât mai rapidă

cu cât e mai mare viteza de convergenţă a metodei, altfel spus, cu cât mai repede se apropie de z fracţiile calculate. Aceeaşi teoremă permite şi găsirea unei relaţii între mărimea numitorului şi numărul de operaţii necesare pentru a-l calcula.[159]

Cu toate acestea, altul e inconvenientul major al creşterii numerelor. În calculul digital, numerele constau din şiruri finite de cifre binare (0 şi 1). Dar la fiecare operaţie cu aceste şiruri, al căror număr de cifre nu poate depăşi o limită fixată, se produce o eroare de rotunjire care poate genera instabilitate numerică şi o pierdere fatală de informaţie necesară cunoaşterii suficient de precise a soluţiei unei probleme. Teoria perturbării e un capitol esenţial al calculului digital, ca şi teoria sistemelor dinamice şi a haosului determinist. O condiţie pentru posibilitatea de a prevedea comportamentul unui fenomen simulat de un sistem dinamic discret, definit de o simplă lege iterativă, e sensibilitatea la erori. Dacă se admit perturbări, chiar şi foarte mici, asupra condiţiilor iniţiale de la care evoluează un proces, atunci s-ar putea ca evoluţia să nu poată fi deloc prevăzută.

În general, calculul cu numere raţionale de forma p/q e impracticabil. Numărătorul p şi numitorul q cresc de obicei prea repede, şi depăşesc limitele de spaţiu impuse de memoria maşinii. Creşterea numerelor se reflectă şi asupra complexităţii computaţionale: calculul lui p şi q e cu atât mai consumator de resurse cu cât mai mari devin aceste numere. Un prim remediu constă în abandonarea reprezentării numerelor raţionale sub forma p/q şi folosirea numerelor în *virgulă mobilă* $(,a_1\ a_2\ a_3 \quad a_n)B^k$, unde n e un număr dinainte fixat, iar informaţia asupra mărimii numărului e extrasă din exponentul k. Doar în unele cazuri particulare poate fi avantajos calculul tradiţional, cu fracţii, dar nu atât datorită simplificărilor obţinute împărţind p şi q prin eventuali factori comuni, cât datorită unor aproximări continue şi unor tehnici speciale de rotunjire.[160] Scurtătura aceasta nu ajunge ca să evităm inconvenientele datorate cazurilor de creştere anormală a numerelor sau

operațiilor. Creșterea poate să anihileze orice pretenție de realitate a ceea ce încercăm să calculăm.

După cum scrie Donald Knuth, „experiența calculului cu fracții demonstrează că în multe cazuri numerele cresc până devin foarte mari [...] e important să includem în orice program care efectuează o adunare, o înmulțire sau o împărțire și un test de *overflow*".[161]

În general, matematica nu se ocupă cu calcularea numerelor – nici mari, nici mici. Atunci când o face, e pentru necesități practice și aplicative. Dar chestiunea modalității în care acest lucru se poate face, *cum* pot fi calculate în mod real numerele indispensabile unei descrieri a lumii, chestiunea aceasta pune probleme foarte interesante din punct de vedere teoretic. Traducerea modelelor diferențiale și integrale în algoritmi și în calcul digital la scară mare, care e de altfel versiunea adusă la zi a aritmetizării analizei de la finele secolului XIX, duce la reformularea marilor teme cu care s-au confruntat cercetările asupra fundamentelor de la începutul secolului al XX-lea: când și în ce mod admite soluție o problemă sau o clasă de probleme? Ce anume înseamnă a rezolva *efectiv* o problemă? Ce semnificație capătă finitul și infinitul în procedurile automate? Care e relația dintre discret și continuu?

La începutul anilor '40, calculul numeric, aflat într-un stadiu relativ inițial, consta în rezolvarea unei ecuații în termeni *numerici*, și nu atât *analitici*,[162] era mai mult o artă decât o știință a calculului. Într-un anume sens, situația era paradoxală pentru că, începând de la calculele babiloniene din antichitate, adică de pe la 1800 î.Cr., matematica s-a bazat pe algoritmi pur *aritmetici* și *numerici* care se găsesc ascunși chiar și în teoria riguros *geometrică* a *Elementelor* lui Euclid.

Procedurile care serveau la aproximarea numerelor iraționale, ca acelea bazate pe *antanaíresis*, aveau formă iterativă: valorile aproximate erau calculate cu formule recurente care reproduceau numeric creșterea unor figuri geometrice. Din punct de vedere algebric, algoritmul euclidian era virtual legat de construcția unor

fracții, așa numitele *fracții continue*, capabile să aproximeze numerele iraționale, iar numerele reale pot fi definite în termeni de *fracții continue*. Dar generarea recursivă a numărătorilor și numitorilor fracțiilor produce adesea fenomene de creștere necontrolată care pot provoca oprirea calculului.

Calculul mai avansat a moștenit în mod surprinzător schemele matematicii antice, aceea inspirată de zei; dar criteriile care o alimentează au impus și analiza eficienței procedurilor. Formulele antice, atunci când erau de natură recursivă, erau deja procedee mecanice, conforme cu cele mai recente necesități ale calculului digital. Dar abia azi ne dăm seama că orice ciclu al unui proces recursiv oricât de simplu poate moșteni erorile comise în ciclurile precedente.[163] E atunci fatal ca până și cele mai elementare relații recurente cu care se construiesc fracțiile pentru aproximarea numerelor iraționale să fie expuse la fenomene de instabilitate numerică, fenomene care dau un caracter *ireal* exact acelor entități numerice pe care Cantor și Dedekind le considerau ca existând în mod efectiv.

Tot la relații recurente se reduce și calculul unor funcții speciale, cum sunt cele ale lui Bessel, dar și al unor clase particulare de numere, ca numerele Bernoulli – introduse de Jakob Bernoulli, în a sa *Ars Conjectandi* (1713), studiul lor a fost ulterior aprofundat de Leonhard Euler. Numerele acestea apar în sume discrete simple care aproximează integrale, deci în probleme care privesc relația dintre discret și continuu, dintre numere și mărimi geometrice, relație care a marcat dintotdeauna cercetarea matematică, încă de la paradoxurile lui Zenon. Proprietățile lor, ca și relația foarte specială pe care o au cu numărul π, justifică din plin studiul lor ca atare, studiu cu foarte mare importanță teoretică. Numerele Bernoulli sunt numere raționale, fracții ale căror numitori sunt cunoscuți în formă explicită și sunt numere cu creștere rapidă. În epoca recentă, pentru calculul lor s-au inventat algoritmi complecși: doi dintre cei cinci factori primi ai numărătorului lui B_{200}, al două sutelea număr Bernoulli, cu 90 și respectiv 115 cifre, au

fost evaluați grație celor mai puternice calculatoare digitale. Euler era deja uimit de viteza de creștere a numerelor Bernoulli. Acestea formau, observa el, un „șir care diverge rapid și crește mai puternic decât orice alt șir geometric de termeni crescători".[164]

16
Creşterea matricelor

Orice problemă de matematică aplicată şi computaţională se reduce până la urmă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii *liniare*. Teza – mai degrabă constatarea – aceasta e de-acum foarte răspândită şi acceptată. Dacă problemele nu sunt liniare, atunci se liniarizează, iar astfel se obţin pe cale aproximativă primele informaţii utile despre soluţia unei ecuaţii diferenţiale sau integrale, despre o problemă de minim sau de aproximare polinomială. Aproximarea nu e dăunătoare, e chiar norma – totul stă în a cuantifica aproximarea, în a stabili când e posibilă şi când e convenabil s-o faci. Liniarizarea implică o eroare de aproximare, dar aceasta nu e mai dăunătoare decât alte erori care apar în diferiţii paşi care conduc, pornind de la ecuaţiile iniţiale, la calculul digital pur.

Începând din a doua jumătate a secolului trecut, a devenit limpede că sistemele de ecuaţii liniare utile în aplicaţii au dimensiuni foarte mari. Cum un sistem de ecuaţii liniare e identificat de o *matrice* de coeficienţi, adică de un tabel cu numere dispuse pe linii şi coloane, calculul matricial la scară mare a devenit o necesară urgenţă în deceniile de început ale calculului digital. Dificultatea principală era acum reducerea modelului iniţial, adică a ecuaţiei diferenţiale sau integrale, la calculele pur aritmetice necesare în rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare. Atenţie, termenul „liniar" ne poate păcăli. Distincţia dintre liniar şi neliniar a marcat adesea, în matematica computaţională şi aplicată, o graniţă

critică de rezolubilitate, dar există şi probleme *liniare* absolut refractare la orice tentativă de rezolvare. Situaţia tipică e aceea în care matricea coeficienţilor unui sistem de ecuaţii liniare e puternic rău condiţionată, adică soluţia sistemului e extrem de sensibilă la erori asupra datelor.

O *matrice A* cu n linii şi m coloane e un tabel de numere dispuse într-un dreptunghi, în care elementul de de pe poziţia (i, j), aflat la intersecţia dintre linia i şi coloana j, se notează cu simbolul a_{ij}. Dacă $n = m$, matricea are formă pătrată. Matricele sunt entităţi matematice de sine stătătoare, la fel cum sunt numerele, polinoamele şi funcţiile, iar algebra matricelor se bazează pe operaţii de sumă, produs şi inversare analoage algebrei numerelor, dar, în general, lipsindu-i unele dintre proprietăţile acesteia, cum ar fi comutativitatea produsului. Elementele unei matrice pot fi coeficienţii unii sistem de ecuaţii liniare, în timp ce termenii cunoscuţi ai ecuaţiilor (cei din partea dreaptă a ecuaţiilor) sunt aranjaţi într-o coloană de numere care defineşte un *vector*.

În imaginaţia curentă, un vector e înţeles, de regulă, ca o săgeată, având o direcţie şi o lungime, dar putem concepe un vector şi ca o coloană de numere. În planul cartezian, un vector v cu punctul de aplicaţie în origine poate fi reprezentat ca o coloană cu numai două numere, x şi y, corespunzătoare proiecţiilor lui pe axe.

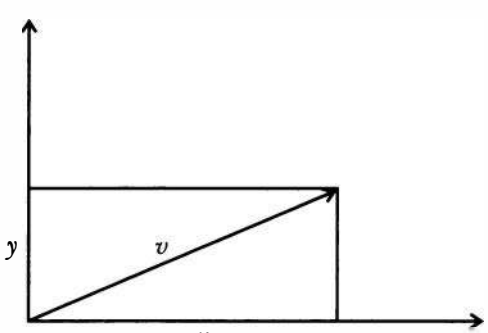


Figura 8

Atunci, într-un spațiu cu n dimensiuni, un vector v se va defini ca o coloană cu n numere. Numărul de dimensiuni nu presupune în mod necesar o idee de spațiu sau de spațiu-timp. Introducerea mai multor dimensiuni poate fi pur și simplu *un mod de a gândi o problemă în termeni matematici*. În economie poate fi necesară configurarea unui cost împărțit pe sectoare industriale. Dacă apar, să zicem, 10 sectoare (industria automobilelor, textilă, navală, construcții etc.) costul va fi reprezentat de un vector cu 10 componente, fiecare dintre ele fiind un număr care măsoară costul dintr-un anumit sector.

O matrice pătrată A acționează pe un vector v ca un operator sau ca o transformare care asociază lui v un alt vector w. Se scrie atunci $w = Av$ și se spune că w e egal cu produsul lui A cu v.[165] Devine acum important cazul în care, ca efect al unui operator matriceal A, vectorul v nu-și schimbă direcția, deci se transformă într-un vector w cu aceleași componente ca și v înmulțite cu un același număr λ, real sau complex. Scriem $Av = \lambda v$, formulă care exprimă un fel de *invarianță*, pentru că direcția vectorului nu se schimbă sub efectul operatorului A. În acest caz, λ e o *valoare proprie* a matricei A iar v e *vectorul propriu* corespunzător. În multe cazuri, tocmai valorile proprii ale unei matrice sunt cele care decid gradul de eficiență a unei metode de rezolvare a unui sistem de ecuații liniare $Ax = b$ (unde b e vectorul termenilor cunoscuți), precum și sensibilitatea soluției x față de erorile asupra datelor A și b.

Algebra vectorilor și matricelor s-a dezvoltat întâi în context geometric și algebric, dar, cu timpul, au devenit din ce în ce mai evidente implicațiile calculului matriceal în diferite domenii ale matematicii aplicate, în studiul echilibrelor, în mecanică, în fizica teoretică, în ingineria electronică și în informatică, de exemplu în interacțiunile ei cu aspectele computațional-numerice ale motoarelor de căutare în rețea.

Începând cu anii '40 și '50, veritabila noutate a calculului consta în *dimensiunea* mare a problemelor și în faptul că matricele

de coeficienți ale unui sistem de ecuații liniare care-și propune să simuleze cu suficientă precizie un fenomen fizic au zeci de mii de linii și coloane. Rezolvarea unui asemenea sistem presupune un procedeu automat care să țină seama de tehnicile de *reprezentare* a numerelor, de *timpul* de execuție și de *spațiul* de memorie necesar. Împrejurare care impune o schimbare radicală a legilor aritmetice cu care se efectuează calculele.

La rândul său, algebra matricelor a devenit un capitol central al calculului digital. Aproape toate problemele computaționale ale matematicii se reduc la unele de algebră liniară și de calcul matriceal.[166] Merită citate, în această privință, cuvintele lui Gilbert Strang: „Pentru ingineri și pentru cercetătorii din științele fizice și sociale, algebra liniară ocupă acum un spațiu care e adesea mai important decât analiza. Generația mea de studenți și, cu siguranță, profesorii mei, nu și-a dat seama de apariția acestei noutăți. E vorba, în parte, despre trecerea de la analogic la digital; vectorii iau locul funcțiilor. În algebra liniară, analiza spațiilor *n*-dimensionale se combină cu aplicațiile matricelor".[167]

În primele faze ale dezvoltării calculului la scară mare, în anii '40, un manual standard, foarte des consultat, era *The Calculus of Observations*, al lui Whitakker și Robinson, publicat în mai multe ediții. Dar manualul se concentra mai ales pe probleme de interpolare, pe rezolvarea ecuațiilor neliniare, pe cuadratura numerică și pe analiza Fourier. Rezolvarea unui sistem de ecuații liniare nu apărea printre problemele analizate pentru ele însele: era doar un apendice funcțional al unei teorii de aproximare bazată pe tehnica celor mai mici pătrate și singura metodă oferită, descrisă în doar câteva pagini, era aceea datorată lui Cramer. Peste foarte puțin timp s-a descoperit completa ineficiență a acestei metode.

Manualul lui Whitakker și Robinson a fost consultat și de James Wilkinson, unul dintre părinții științei calculului din secolul trecut, care a lucrat împreună cu Alan Turing la National Physical Laboratory între 1946 și 1948. În acea perioadă, Wilkinson fusese însărcinat de Armament Research Department să

rezolve un simplu sistem de 12 ecuații liniare cu 12 necunoscute și prima sa tentativă, după cum el însuși povestește, a fost cu metoda lui Cramer. A fost poate prima dată când un procedeu recursiv, cu un număr *finit* de operații, se dovedea absolut *irealizabil*. Iar cauza nu era problema, ci metoda care presupune un număr factorial de operații aritmetice și deci, pentru doar 50 de ecuații, un timp de calcul – socotind circa 10^{-6} secunde pentru o înmulțire – mai mare decât timpul scurs de la nașterea universului dintr-un ipotetic big bang până astăzi. Era oricum evident că o soluție calculabilă în timp astronomic, chiar dacă finit, nu există în fapt: într-un anume sens, ea e perfect *ireală*. Și asta din pricină că, odată cu creșterea numărului n de ecuații, se înregistra o creștere anormală, mai mult decât exponențială, a cantității de operații aritmetice.[168]

În 1894, David Hilbert a publicat un articol despre aproximarea unei funcții continue printr-un polinom folosind criteriul celor mai mici pătrate.[169] Problema ridicată de Hilbert răspundea unei strategii computaționale fundamentale: reducerea calculării valorilor unei funcții arbitrare (continue) la un model de calcul simplificat, cum e un polinom, care să constea numai în adunări și înmulțiri. Matematica a căutat mereu asemenea simplificări, începând cu algebra lui Newton, care-și propunea să reprezinte funcții $f(x)$ de complexitate analitică mare folosind numai combinații simple de puteri ale lui x. Au fost și alți matematicieni care, înaintea lui Hilbert, s-au dedicat acestei teme, iar în 1885 Weierstrass demonstrase că orice funcție continuă definită pe un interval închis se poate aproxima uniform cu un polinom. Așadar, în afara unei erori de aproximare oricum inevitabile, calculul funcției continue se reducea, măcar în principiu, la un număr finit – depinzând de gradul polinomului aproximant – de adunări și înmulțiri. Intra și acest lucru în proiectul mai amplu de aritmetizare a analizei.

Problema lui Hilbert cerea rezolvarea unui sistem de ecuații liniare a cărui matrice H a coeficienților (pătrată, cu n linii și n

coloane) e privită azi ca model de matrice numerică intratabilă. I se spune *matricea lui Hilbert* şi arată aşa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

George Forsythe, unul dintră părinţii ştiinţei calculului din secolul trecut, avea să se ocupe, câteva zeci de ani mai târziu, şi de matricea lui Hilbert. Într-un important articol din 1970, el observa că, pentru o dimensiune n doar puţin mai mare decât 8 sau 9, o procedură automată generică nu e capabilă să rezolve un sistem liniar cu n necunoscute definit de H, în timp ce pentru valori mici ale lui n, cum ar fi 6, exista o mare discrepanţă între soluţiile unor probleme aparent identice calculate cu maşini numai foarte puţin diferite. Astăzi am spune că sursa acestor inconveniente e faptul că matricea H e puternic *rău condiţionată*. O problemă se numeşte rău condiţionată dacă variaţii mici ale datelor de intrare pot produce variaţii mari ale soluţiei, indiferent de procedeul de calcul folosit.

Procesul de aproximare studiat de Hilbert constă în minimizarea unei expresii a erorii rezultate în urma înlocuirii unei funcţii continue cu un polinom. Pentru a minimiza eroarea, trebuie rezolvat un sistem de ecuaţii liniare $Hx = b$ a cărui matrice H e intratabilă chiar şi pentru dimensiuni mici.[170] Deja pentru $n = 6$ elementele inversei H^{-1} a lui H ne fac să prevedem o creştere nemăsurată pentru valori ale lui n doar cu puţin mai mari.[171] Numărul 4410000 din poziţia (5,5) a inversei lui H poate amplifica în mod catastrofal o perturbare oricât de mică a celei de-a cincea componente a vectorului b al termenilor cunoscuţi.[172]

$$\begin{bmatrix} 36 & -630 & 3360 & -7560 & 7560 & -2772 \\ -630 & 14700 & -88200 & 211680 & -220500 & 83160 \\ 3360 & -88200 & 564480 & -1411200 & 1512000 & -582120 \\ -7560 & 211680 & -1411200 & 3628800 & -3969000 & 1552320 \\ 7560 & -220500 & 1512000 & -3969000 & \mathbf{4410000} & -1746360 \\ -2772 & 83160 & -582120 & 1552320 & -1746360 & 698544 \end{bmatrix}$$

Pentru $n = 6$, numărul 4410000 e elementul de modul maxim din matricea H^{-1}; dar dacă-l lăsăm pe n să crească, erorile repercutate asupra elementelor lui x devin din ce în ce mai mari. Pentru $n = 10$, elementul de modul maxim al inversei este $3{,}48 \times 10^{12}$, şi deci dacă apare vreo eroare pe vreun element al lui b, am putea avea o eroare enormă pe un element al soluţiei x. Numărul de condiţionare al matricei sare la circa 10^{13}.

Toate acestea sunt legate de structura *problemei* matematice, nu depind de alegerea algoritmului de rezolvare a ei. Dar există şi un grad de sensibilitate a sistemului de calcul faţă de erorile asupra operaţiilor individuale ale algoritmului. Observând că metoda lui Cramer era complet ineficientă pentru rezolvarea unui sistem de 12 ecuaţii, Wilkinson a ales să folosească algoritmul lui Gauss care constă în a transforma în zerouri toate elementele de sub diagonala principală a matricei coeficienţilor, reducând-o astfel la o matrice T de formă triunghiulară (cu numai zerouri sub diagonala principală). Metoda lui Gauss e incomparabil mai eficientă decât a lui Cramer, dar nu e întotdeauna în măsură să împiedice creşterea nemăsurată a numerelor calculate succesiv. De această creştere depinde eroarea de calcul, şi există o formulă care stabileşte o limită superioară a erorii în funcţie de mărimea elementelor matricei triunghiulare, exprimând cu precizie deterministică această dependenţă.

De obicei, eroarea care apare în metoda lui Gauss e limitată superior de o expresie E care constă într-o măsură a *mărimii* matricei coeficienților A înmulțită cu pătratul lui n și cu un *factor de creștere*. Acesta e definit tocmai de raportul (în valoare absolută) dintre maximul elementelor matricei triunghiulare T și maximul elementelor lui A. Rezultatul nu are semnificație probabilistă, ci deterministă, în sensul că, pentru orice valoare posibilă n a dimensiunii matricei, eroarea nu va depăși niciodată E.[173] Putem conchide că, atunci când valorile calculate ale lui T devin foarte mari, întregul proiect computațional își pierde sensul. Factorul de amplificare a erorii poate fi exprimat în mai multe feluri, dar, în orice variantă, el depinde de creșterea numerelor calculate efectiv.

În 1946, Hotelling a fixat o limită de natură exponențială a erorii, proporțională cu 4^n, limită care nu dădea mari speranțe posibilității rezolvării numerice, cu proceduri automate, a problemelor puse de fizica matematică. Totuși, inițialele previziunile pesimiste au fost apoi corectate de analize mai atente. În 1947, John von Neumann și Herman Goldstine publicau un articol istoric în care analizau comportarea erorii pe parcursul inversării unei matrice simetrice și pozitiv definite,[174] folosind în metoda lui Gauss o aritmetică cu un indice de precizie dinainte fixat. Von Neumann și Goldstine au demonstrat că eroarea, deși e supusă unor fluctuații care nu pot fi controlate direct, nu trece de o anume cantitate fixată care depinde de dimensiunea matricei, de numărul de cifre cu care se fac calculele și de raportul dintre valorile proprii maximă și minimă ale lui A.[175] Ar fi puțin să spunem că e un rezultat miraculos: părea că pentru dimensiuni mari ale matricei și pentru milioane sau miliarde de operații aproximate ar fi fost necesară o analiză *statistică* a distribuției erorilor de rotunjire (a fost și ea făcută, desigur); dar rezultatul lui von Neumann și Goldstine avea caracter *determinist*, chiar dacă între marginile unui interval de indeterminare: eroarea, care prin definiție nu poate fi cunoscută, nu avea cum să depășească un anumit prag care putea fi, în general, evaluat și depindea de creșterea numerelor calculate.

În 1971, într-un articol important care trecea în revistă analiza erorilor elaborată în cei douăzeci sau treizeci de ani dinainte, Wilkinson[176] observa că nu e corect să afirmi că eroarea acumulată în anumite stadii ale unui calcul se *amplifică* în stadiile succesive, pentru că e posibil ca, dacă numărul de operații e suficient de ridicat, erorile să se compenseze statistic, diminuându-și astfel, în mod paradoxal, efectul. Dușmanul cel mai de temut nu e propagarea erorilor asupra operațiilor, ci eroarea *inerentă problemei* inversării unei matrice, anume gradul de sensibilitate intrinsecă a inversei lui *A* față de variații mici ale elementelor lui *A*, indiferent de alegerea modalității de rezolvare. Această sensibilitate e măsurată de un *indice de condiționare*.

Conceptul de condiționare a unei matrice apare pentru prima dată la Alan Turing, într-un articol din 1948 despre rezolvarea numerică a unui sistem de ecuații liniare și despre inversarea unei matrice *generale*, adică nu neapărat simetrică și pozitiv definită, cu elemente numere reale.[177] Turing introducea o *normă*, un număr real asociat matricei, un indicator care trebuia să exprime *mărimea*; nu dimensiunea, dată de numărul *n* de linii și coloane, ci mărimea globală a elementelor sale. Norma aleasă de Turing, numită azi norma lui Frobenius, era definită de rădăcina pătrată a sumei pătratelor elementelor matricei: un simplu *număr*, așadar, menit să măsoare mărimea unei întregi *matrice*. Astfel, observa Turing, eroarea la nivelul soluției unui sistem de ecuații liniare poate fi exprimată ca eroare la nivelul elementelor matricei *A* a coeficienților înmulțită cu un factor μ egal cu produsul dintre norma lui *A* și norma inversei lui *A* (împărțit la *n*). Amplificarea erorii prezente la nivelul elementelor lui *A* depindea deci de mărimea acestui factor care, din această cauză, devenea un *număr de condiționare*. Dacă μ e mare, nu știm dacă numerele calculate dau o informație plauzibilă despre soluția exactă a sistemului de ecuații; e un fel de a spune că nu vom avea informații suficiente despre soluțiile ecuațiilor care definesc modelul matematic al fenomenului fizic a cărui evoluție vrem s-o prezicem și a căror

aproximare aritmetică e sistemul de ecuații liniare. Dar dacă μ e relativ mic, e posibil să prezicem evoluția.

Considerațiile acestea nu depind de algoritmul ales pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare: numărul de condiționare depinde numai de proprietățile intrinsece ale lui A și ale inversei sale. Dar indicele μ intervine și în stabilitatea algoritmilor, adică a procedurilor efective cu care se rezolvă numeric sistemul de ecuații, anume în modul în care eroarea se propagă pe parcursul acestor operații. Măsura sensibilității rezultatului calculului la erorile asupra operațiilor (în mod necesar aproximate) se exprimă printr-o formulă care depinde în mod esențial de μ.[178] Acest lucru era implicit în articolul lui von Neumann și Goldstine din 1947 despre inversarea matricelor simetrice și pozitiv definite. În acel articol, eroarea nu depășește o valoare care depinde de un factor μ exprimabil ca raport între valoarea proprie maximă și valoarea proprie minimă a lui A; dar acest raport coincide cu acela dintre $N(A)$ și $N(A^{-1})$, unde N notează norma euclidiană, echivalentă (chiar dacă nu identică) cu norma Frobenius folosită de Turing.[179] În cazul specific al matricelor simetrice și pozitiv definite, considerat de von Neumann și Goldstine, norma euclidiană coincide cu valoarea proprie maximă a matricei. În acest caz, chiar această valoare proprie maximă măsoară numeric *mărimea* matricei.

În concluzie, eroarea totală nu depășește o valoare care depinde de modul în care cresc numerele pe parcursul procesului de calcul. Dacă aceste numere devin foarte mari, scad precizia calculului și capacitatea de predicție a modelului matematic. Nu e vorba doar de o pierdere de informație datorată rotunjirii numerelor foarte mari, nici de riscul de *overflow*. Punctul critic e următorul: creșterea numerelor calculate duce la creșterea indicelui de condiționare, ceea ce împiedică predicția asupra comportamentului erorii. Acest indice intervine ca o componentă esențială în expresia care definește limita superioară a erorii – limită care nu poate fi depășită. Dacă limita e un număr mare, atunci eroarea *poate* fi mare,[180] și exact această situație de incertitudine pune sub

semnul îndoielii semnificația numerelor printate la finalul procesului de calcul.

Nu doar creșterea numerelor minează un sistem de calcul; și descreșterea lor, urmată de operații cu numere apropiate de zero, poate produce rezultate neașteptate, mergând până la oprirea procesului de calcul. În toate cazurile critice, soluția problemei devine evanescentă, într-un anume sens cu totul ireală. Există teoreme care afirmă existența soluției, dar nimeni nu e în stare să-i calculeze cifrele.

E sigur însă, în ciuda a ceea ce credeau Cantor și Frege, că numerele nu au, toate, același statut ontologic. Numerele care există, dar care nu pot fi calculate, nu au aceeași realitate ca numerele calculate de mașină. Primele nu se plasează, spre deosebire de celelalte, în spațiul și timpul unei efective elaborări automate, nici în act, nici virtual. Există un punct de vedere conform căruia un număr există, e real, numai dacă există o procedură efectivă care-l calculează. Dar această procedură trebuie să fie *eficientă*: altfel, cum se întâmplă cu metoda lui Cramer sau cu matricea lui Hilbert, nu am ști să distingem calculabilitatea de necalculabilitate prin prisma realizabilității *efective*. Ceea ce e calculabil ar fi la fel cu ceea ce nu e calculabil.

Boetius arătase că numerele, oricât de diferite ar fi între ele, nu sunt compuse din altceva decât din ele însele.[181] Mai târziu, conceptul de închidere a unui corp de numere F a permis să fim siguri că, în urma combinării numerelor folosind operațiile definite în F, nu producem numere străine, ci tot elemente ale lui F. Totuși, ce putem spune despre numerele calculate de o mașină? În cazul acesta, operațiile asupra numerelor generează tot numere care, însă, în timpul procesului de calcul, ar putea să-și piardă orice semnificație. Închiderea algebrică a corpului nu ajunge ca să garanteze că numerele generate de un proces computațional au semnificație.

Doar conceptul de număr întreg nu e de ajuns ca să explice, în toată generalitatea sa, conceptul de algoritm ca proces efectiv

desfăşurat în timp şi spaţiu. Dedekind a căutat un răspuns afirmativ, dar a reuşit să demonstreze numai că recursivitatea aritmetică, restrânsă la operaţiile de sumă, produs şi împărţire, se reduce la proprietăţi ansambliste care permit fundamentarea conceptului de număr natural.

Dar ce înseamnă, de fapt, *efectiv*? Termenul, folosit informal, apare adesea în literatură, dar niciodată cu o definiţie explicită. Andrej A. Markov Jr încerca să explice că efectivitatea unui algoritm e o prerogativă esenţială şi constă în „tendinţa algoritmului de a obţine un anumit rezultat",[182] calculat pe baza unui set de date iniţiale. S-a încetăţenit atunci obiceiul de a numi efectiv un proces de calcul definit în mod recursiv (criteriu echivalent cu λ-formalismul şi cu maşina Turing) pornind de la faptul că, începând cu teoria lui Dedekind de la finele secolului XIX, recursivitatea a fost tehnica folosită pentru definirea constructivă a operaţiilor fundamentale ale aritmeticii. Dar, în paralel cu efortul îndreptat către definiţia teoretică, algoritmul a devenit şi protagonistul unei matematici computaţionale orientate către rezolvarea problemelor ştiinţei aplicate. Iar în acest cadru, cel puţin din a doua jumătate a secolului XX, accentul a început să se mute de pe efectivitate pe o cerinţă mai radicală şi operativă de *eficienţă*.

Proiectul fundamental a fost întotdeauna aritmetizarea matematicii, adică reducerea analizei la conceptul de număr întreg şi la operaţiile de trecere la limită. Dar pentru a realiza această reducere era nevoie de algoritmi eficienţi, fie pentru a pune în operă strategii computaţionale complexe, fie pentru a efectua calculele aritmetice elementare *ascunse* în interiorul acelor strategii, ca adunările şi înmulţirile între numere, interpolările liniare, produsele de polinoame sau de matrice. Încă o dată: calculatorul efectuează milioane de operaţii şi foloseşte numeroase subrutine care produc miriade de rezultate intermediare la care nu se ajunge uşor. În prezenţa acestui calcul ocult imanent, trebuie să putem conta pe o aritmetică a maşinii care să simuleze aritmetica exactă în modul

cel mai eficient posibil, şi în termeni de stabilitate, şi în termeni de economie de timp şi spaţiu.

Oricum, matematica urmăreşte întotdeauna un principiu de economie: caută parcursul minim pentru a obţine un scop dinainte fixat. Principiu care nu e neapărat dictat de criteriul utilităţii şi care se conformează, mai întâi de toate, unei strategii de simplificare teoretică, una care tinde să comprime maximum de informaţie într-un efort de calcul minim. Dacă vrem să prevedem evoluţia unui fenomen, trebuie să evităm ca informaţia conţinută în modelele matematice să fie tradusă într-o nebuloasă aritmetică lipsit de sens: listele de numere obţinute la sfârşitul procesului trebuie să reflecte, la un nivel inferior al informaţiei, în timpul şi spaţiul calculatorului, ceea ce modelul intenţiona să reprezinte. Eficacitatea matematicii în reprezentarea lumii fizice se transmite de-a lungul întregului parcurs intermediar – complex şi accidentat – dintre modelul teoretic şi numerele calculate efectiv. Se poate întâmpla ca, pe parcursul acestui drum, să pierdem contactul cu natura fenomenului fizic a cărui comportare e simulată de modelul iniţial, pentru că eficienţa calculului se bazează, până la urmă, pe matematica pură, pe teoreme şi structuri matematice care prea puţin au de-a face cu fizica, dar a căror eficacitate nu are, din acest motiv, efecte mai puţin miraculoase decât potrivirea iniţială dintre modelul teoretic şi natura fenomenului. Observaţia se verifică mai ales la matrice: dacă, aşa cum se întâmplă de obicei, un model diferenţial e aproximat cu un sistem de ecuaţii liniare, matricea coeficienţilor sistemului are o structură care o reflectă pe aceea a modelului, dar rezolvarea sa poate implica matrice cu o structură complet diferită.

Iată ce scriau Herman Goldstine şi John von Neumann în 1946 despre calculul digital la scară mare care începuse să se contureze în anii '40 şi, în particular, despre rezolvarea matematică a problemelor de mecanica fluidelor cu modele diferenţiale:

> E important să evităm orice echivoc asupra acestui punct. Am putea fi tentaţi să calificăm aceste probleme ca aparţinând de domeniul fizicii

mai mult decât de al matematicii aplicate sau al matematicii pure. Dar vrem să subliniem convingerea noastră că o asemenea interpretare e cu totul greşită. E perfect adevărat că toate aceste fenomene sunt importante pentru un fizician, care le tratează cu toată atenţia. Dar asta nu diminuează importanţa pe care o au pentru matematică. De fapt, credem că e cazul să acordăm acestor fenomene semnificaţie maximă şi din punct de vedere matematic.[183]

Totuşi, calculul trebuie înţeles până în cele mai mici detalii ale sale. Până şi marile sinteze filozofice au căutat, conformându-se unui principiu de realitate, o legătură precisă cu operaţiile cele mai elementare ale calculului. În acest sens, e de aşteptat ca matematica să fie reducţionistă, dar reducţionismul nu trebuie să ne facă să uităm că toate trecerile intermediare între model şi numerele efectiv calculate nu sunt posibile decât graţie intervenţiei unor concepte teoretice şi a unor structuri matematice relativ abstracte. Într-o idee extinsă de realitate, structura cea mai abstractă contează exact ca şi lista de cifre, ininteligibilă în sine, pe care un calculator o printează cât se poate de material la sfârşitul unui proces de calcul: una este oglinda celeilalte, una va fi decriptată folosind-o pe cealaltă. Matematica nu e deci doar abstracţiune. Dar tocmai datorită calităţii sale abstracte şi a conţinuturilor sale teoretice, matematica e un fundament al realităţii acestei lumi şi al modului în care îndrăznim să intervenim pentru a o modifica.

Proximitatea matematicii faţă de ceea ce suntem obişnuiţi să calificăm drept real şi efectiv evocă acel caracter de putere pe care grecii îl atribuiseră operaţiilor sale cele mai simple, precum construcţia unui pătrat peste un segment, şi pe care Platon o denumise cu termenul *dýnamis*. Încă de pe atunci, puterea (*dýnamis*) era capabilă să producă, în afară de temple şi altare în creştere, cele mai sofisticate mecanisme – catapulte şi alte maşini de război. Era deci fatal ca *dýnamis* platonică să se transforme în efectivă putere ştiinţifică şi tehnică, cu toate riscurile pe care le putem imagina şi întâlni astăzi. Un semnal clar al afinităţii dintre realitate şi putere, extinsă la întreaga natură, găsim, într-o epocă deja

profund marcată de avântul prometeic al ştiinţei, în *Etica* lui Spinoza: „[...] natura este totdeauna aceeaşi, iar virtutea şi puterea ei de a lucra este pretutindeni una şi aceeaşi". În fine: „[...] puterea sau năzuinţa oricărui lucru [...] nu este nimic în afară de esenţa dată sau în act a lucrului însuşi." (*Etica*, III, Prefaţă şi Propoziţia 7, Demonstraţie).*

* Spinoza, *Etica*, trad. de Alexandru Posescu, Editura Humanitas, Bucureşti, 2006. (*N. t.*)

17

Criza fundamentelor şi creşterea complexităţii. Realitate şi eficienţă

Nu doar numerele cresc, creşte şi complexitatea calculului. Iar pericolul acesta insidios poate ameninţa chiar şi procedurile cele mai cunoscute şi preţuite. Nu doar algoritmul lui Cramer are de suferit. Dacă folosim metoda clasică a lui Gauss pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare ori pentru a calcula *determinantul* unei matrice,[184] un defect de eficienţă poate apărea din pricina măririi volumului calculelor: în cazul determinantului, numărul de operaţii *aritmetice* e o funcţie polinomială în dimensiunea n, dar nu e întotdeauna simplu de verificat că rămâne polinomial şi numărul de operaţii *binare*, adică acele operaţii elementare asupra cifrelor reprezentării în baza 2 a numerelor care intervin în calcul. Acest număr poate deveni exponenţial.[185]

Începând cu anii '50, studiul complexităţii computaţionale, adică al criteriilor pentru a măsura cât de dificil e să calculăm o funcţie, a devenit unul dintre filoanele cele mai importante ale ştiinţei calculului. Odată cu creşterea dimensiunii, din pricina unei explozii combinatoriale necontrolabile, dificultatea de a rezolva probleme relativ elementare poate creşte exponenţial. E cazul aşa-numitelor probleme NP-complete (rezolvabile în timp Polinomial cu o maşină Nedeterministă): e relativ uşor de verificat dacă o anume soluţie propusă pentru o problemă oarecare de tipul acesta e cu adevărat de acest fel, dar *căutarea efectivă* a unei

soluții cere, în stadiul actual al cunoașterii, un număr de operații cel puțin exponențial.

Teoria complexității a contribuit și la eliminarea crizei fundamentelor care amenințase matematica în primele decenii ale secolului XX, deschizând perpective noi cercetării în sectoare complet ignorate până prin anii patruzeci. Faptul s-a datorat afinității problemelor tratate și tehnicilor necesare înțelegerii lor: problema centrală care impulsionase cercetarea fundamentelor, începând cu celebra listă de douăzeci și trei de probleme a lui Hilbert (Paris, 1900), era de a ști *dacă orice problemă matematică poate fi rezolvată*, fie în sens pozitiv (calculând efectiv soluția), fie în sens negativ (demonstrând că nu există un algoritm care să-i calculeze soluția). Problema centrală a complexității calculului e *dacă o problemă matematică poate fi rezolvată în timp polinomial*, adică folosind un număr de operații egal cu o funcție polinomială în dimensiunea problemei, și deci compatibilă, în principiu, cu timpul și memoria unui calculator.

Într-o scrisoare trimisă în 1956, de la Princeton, Gödel îi punea lui von Neumann o întrebare destinată să devină una dintre problemele fundamentale – încă nerezolvate – ale științei calculului: se poate construi ușor, susținea Gödel, o mașină Turing care, pentru orice formulă F din calculul cu predicate de ordinul întâi și pentru orice număr natural fixat n, permite să decidem dacă există sau nu o demonstrație a formulei F de lungime n (dacă lungimea n e egală cu numărul de simboluri, e suficient să explicităm lista tuturor demonstrațiilor de lungime n care pot fi făcute de mașină și să controlăm dacă printre ele se află demonstrația lui F). Acum, dacă p e numărul de pași (dependent de F și de n) de care are nevoie mașina în acest scop, și dacă $P(n)$ e maximul numerelor p când variază F, *cât de repede crește* $P(n)$ odată cu n, pentru o mașină optimală?

Așadar, Gödel punea o problemă care nu privea rezolubilitatea algoritmică pură, ci complexitatea computațională, adică măsura dificultății calculului. Un comentariu al scrisorii din partea

lui Juris Hartmanis îi pune în evidență importanța strategică în cadrul cercetărilor asupra fundamentelor matematicii. Din rezultatele lui Gödel, arată Hartmanis, știm că există în matematică o asemenea abundență de formule și de probleme încât axiomatizarea ei coerentă și completă e imposibilă. Din rezultatele lui Turing și Church aflăm și că, pentru sisteme formale suficient de complexe, problema generală „care anume aserțiuni sunt sau nu demonstrabile" nu e decidabilă printr-un proces algoritmic. Acum, în scrisoarea sa, Gödel ridica problema succesivă, privind tot fundamentele matematicii, dar în termeni de *creștere a complexității calculului*: odată cu creșterea lui n, cât e de dificil de decis printr-o procedură dacă, într-un sistem formal, o aserțiune admite o demonstrație de lungime n?[186]

Gödel, care năruise visul unei matematici axiomatizate, îndrăznea acum, ca o ironie, să lanseze o ipoteză încă mai optimistă, anume: complexitatea problemei puse lui von Neumann ar putea fi liniară sau cel mult pătratică. Știm azi că ea aparține clasei problemelor NP-complete. Studiul acestei clase a necesitat tehnici foarte apropiate acelora folosite în chestiunile de pură rezolubilitate teoretică, acelea care au permis un răspuns (negativ) la unele dintre întrebările puse de Hilbert în celebra sa conferință din 1900, de la Paris.

Chestiunile mai teoretice ale complexității computaționale s-au intersectat apoi, în varii aspecte, cu măsura eficienței algoritmilor numerici folosiți la rezolvarea problemelor aplicative de cele mai diferite naturi. Modalitățile de creștere a dimensiunii, a numărului de operații, a numerelor calculate efectiv sau a erorii algoritmice sau datorate relei condiționări pot fi, în unele cazuri, criterii pentru a stabili, dacă nu realitatea, măcar existența efectivă a soluțiilor. Dar noile probleme, chiar dacă fundamentale și parțial nerezolvate, nu au declanșat o criză analoagă celei din anii '20 ai secolului trecut. Acum urgența pare să se fi deplasat înspre problemele care privesc informatica teoretică și aplicațiile matematicii computaționale, o știință cuprinzătoare a calculului care

e prin ea însăşi suficient de empirică şi flexibilă ca să tolereze imperfecţiuni sau incertitudini de parcurs.

Eficienţa unui algoritm depinde mai ales de două elemente: complexitatea şi stabilitatea, care e sensibilitatea totală faţă de erorile asupra operaţiilor. E corect şi inevitabil să vorbim despre soluţia unei probleme matematice, dar în cele mai multe cazuri această soluţie nu e deloc cunoscută, iar calculul formulei sale analitice, presupunând că aşa ceva există, ar comporta erori de aproximare mai mari decât cele datorate înlocuirii modelului iniţial cu unul mai simplu. Înlocuind modelul diferenţial sau integral cu un model aritmetic, soluţia se va calcula doar cu operaţii fundamentale asupra numerelor: adunări, scăderi, înmulţiri, împărţiri. Totuşi, cunoaşterea la care se poate ajunge e întotdeauna aproximată, iar rezultatele calculate pot fi de neatins. Concluzia e că acel grad de certitudine propriu aritmeticii elementare a numerelor, pe al cărei model construise Hilbert tehnicile (matematice) folosite pentru justificarea utilizării matematice a infinitului, nu putea fi apărat pe de-a-ntregul. Chiar şi o singură adunare, executată de un calculator, poate genera numere lipsite de sens.[187]

O tipologie a erorii se referă la procesele computaţionale de tip iterativ: cu aplicări repetate ale unui operator se generează un şir de numere a căror distanţă faţă de soluţie (interpretabilă ca eroare) tinde la zero. Din procese de calcul asemănătoare, cunoscute încă din antichitatea cea mai îndepărtată, au derivat conceptele analitice de limită şi de convergenţă a unui şir; de altfel, unele demonstraţii de convergenţă încă se bazează, chiar mai mult decât pe argumentul logic, pe existenţa şi pe proprietăţile proceselor de calcul înseşi. Dar suntem noi efectiv capabili, printr-o procedură iterativă, să ne apropiem de soluţie până la a reduce distanţa la o valoare arbitrar de mică? Multă vreme, matematicienii nu şi-au pus această întrebare, şi îi putem auzi chiar şi azi afirmând, în aceiaşi termeni ca şi Cauchy, că, pentru rădăcinile unei ecuaţii algebrice, se pot calcula „valori aproximative *arbitrar* de apropiate".[188] Dar apropierea asta indefinită de soluţie are loc numai

virtual, iar eroarea de aproximare *nu* poate deveni arbitrar de mică. În mod fatal, erorile de rotunjire creează, în jurul rădăcinii ecuației, un *interval de incertitudine* care golește de semnificație valorile numerice calculate dincolo de o anumită limită de aproximare: un algoritm bun va putea furniza, după un anumit număr de pași, o valoare situată în interiorul acelui interval, dar nu are sens să încercăm să îmbunătățim valoarea calculând una succesivă în același interval.

Pentru a explica în ce constă continuul, așa cum am mai amintit, Poincaré recomanda să considerăm două curbe care se intersectează. Putem să ni le imaginăm trasate pe planul cartezian. Imaginația noastră tinde să și le închipuie ca două benzi subțiri care, intersectându-se, trebuie să aibă o porțiune comună. Matematicianul mai face un pas: fără a renunța la sugestia imaginației, încearcă să configureze curba fără lățime și punctul fără mărime. Îi vine atunci ideea să se gândească la curbă ca la o *limită* la care tinde o bandă pe măsură ce-și reduce progresiv lățimea. Limita la care tinde aria intersecției a două benzi când lățimea amândurora tinde la zero va fi un punct. Din acest motiv, conchidea Poincaré, suntem dispuși să susținem, conform unui adevăr intuitiv, că două curbe care se intersectează *trebuie* să aibă un punct comun.

Ce se întâmplă când abscisa α a punctului de intersecție P a celor două curbe nu corespunde unui număr rațional? Cu strategia sugerată de definițiile teoretice ale corpului numerelor reale încercăm că calculăm un șir de intervale de lungime descrescătoare, fiecare conținut în cel precedent, care includ α. În principiu, suntem îndreptățiți să presupunem că putem defini un interval de lungime *arbitrar* de mică și care conține α. Dar dacă folosim cei mai cunoscuți algoritmi numerici capabili să individualizeze, pas cu pas, aceste intervale, ne dăm seama că nu e posibil să reducem lungimea lor dincolo de o anumită limită. Motivul acestei imposibilități stă în necesitatea trunchierii sau rotunjirii șirurilor de cifre ale numerelor efectiv calculate.

Dacă cele două curbe sunt definite pe planul cartezian de două funcții $f(x)$ și $g(x)$, ecuația care trebuie rezolvată numeric e $h(x) = 0$, unde funcția h e definită de diferența, pentru orice x, dintre $f(x)$ și $g(x)$, adică $h(x) = f(x)-g(x)$. Existența teoretică a numărului α care anulează funcția h e garantată de o teoremă celebră a lui Bernhardt Bolzano: dacă într-un interval închis $[a, b]$ de capete a și b, adică într-o mulțime de numere reale x pentru care $a \leq x \leq b$, o funcție continuă are semn pozitiv pentru o anume valoare a lui x, și semn negativ pentru o altă valoare, atunci există un număr α cuprins între a și b pentru care funcția se anulează (în figura 9, funcția h are semn pozitiv în a și semn negativ în b). Strategiile pentru calculul lui α folosesc adesea această teoremă: se calculează iterativ intervale de capete din ce în ce mai apropiate în așa fel ca funcția h să schimbe semnul în fiecare dintre ele. Șirul indefinit de asemenea intervale definește numărul α care, astfel, există, măcar în principiu, în mulțimea numerelor reale. Dar ce se poate spune despre calculul efectiv al numerelor cu care îl aproximăm pe α? În mod tipic, calculul acesta implică evaluarea funcției h în anumite puncte, pentru a verifica de fiecare dată dacă e pozitivă sau negativă. Dar din cauza erorilor de rotunjire, nu calculăm de fapt $h(x)$, ci o funcție $t(x) = h(x)+ e(x)$, unde $e(x)$ e o perturbare care nu depășește, în valoare absolută, un anumit număr pozitiv ε. Acum, dacă $[c,d]$ e intervalul maxim care conține α și în interiorul căruia funcția h e (în valoare absolută) mai mică sau egală cu ε, nu e dificil de arătat că dacă $t(x)$ e pozitivă (sau negativă) în acest interval, atunci *nu* e neapărat la fel și pentru $h(x)$.[189] Din momentul în care x calculat intră în intervalul $[c,d]$, calculele noastre pentru a controla dacă funcția h ia semne diferite nu mai duc la nici o concluzie. Așadar, nu e posibil să calculăm un interval mai mic decât $[c,d]$ care să conțină soluția α a ecuației $h(x) = 0$, adică abscisa intersecției celor două curbe. Nu cunoaștem poziția lui α în interiorul unui interval a cărui lungime nu mai poate fi redusă.

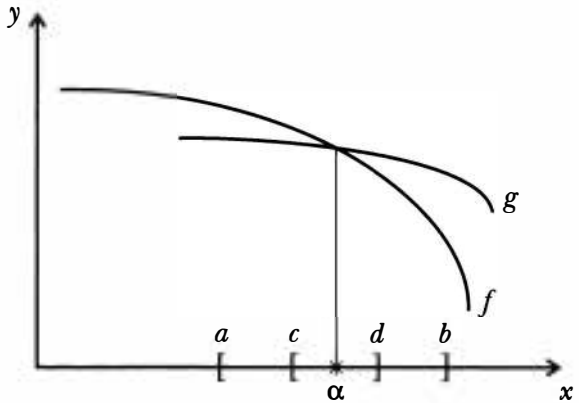


Figura 9

Evident, raționamente de același fel funcționează pentru probleme mai complexe decât cea descrisă, ca rezolvarea unui sistem de ecuații neliniare sau a unei probleme de minim. Norul de nedeterminare care înconjoară în mod regulat soluția unei probleme face ca însăși existența ei să fie problematică. Tot ce știm despre acea soluție se află în algoritmul cu care o aproximăm și e subînțeles că algoritmul respectiv trebuie să poată da o informație adecvată scopurilor pentru care se calculează soluția. Într-un anume sens, soluția *este* algoritmul însuși, dar concluzia aceasta presupune și *eficiența* algoritmului, măsurată în termeni de stabilitate (sensibilitate la erori) și de complexitate computațională. În concluzie, și constructibilitatea algoritmică, și eficiența ar trebui să intre între presupozițiile necesare pentru a fundamenta o ontologie a numerelor. Eficiența e un criteriu al matematicii computaționale și al calculului automat la scară mare care completează ideea pură de efectivitate introdusă în cadrul calculabilității teoretice.

Concluzia aceasta pare să mute realitatea numerelor din zona unui complex de definiții teoretice în ideea eficienței algoritmice concrete. Totuși, ca un algoritm să fie eficient, trebuie să putem

insera în calculul cel mai concret anumite entități matematice care se referă la teoreme și structuri matematice relativ abstracte, adesea străine de modelul cu care se încearcă simularea unui fenomen. De exemplu, matricele care intervin într-o procedură – cu unicul scop de a simplifica și ușura calculele – au de obicei o structură specială care se definește în mod abstract, de multe ori, folosind proprietățile unui grup algebric. Doar pentru că e vorba despre matrice cu o anume *structură*, și nu de matrice generale, reușim să ducem la bun sfârșit calcule altminteri imposibile. Materialitatea eficienței presupune deci existența unor entități matematice abstracte. Chiar Goldstine și von Neumann avertizau că, așa cum am amintit deja, calculul digital se bazează în mare parte pe matematica pură.

Teza, susținută în trecut, că toate numerele definite în mod coerent au același statut ontologic nu mai poate fi apărată, dar nu e mai puțin adevărat că existența concretă a numerelor depinde de o cunoaștere teoretică de natură să stabilească condițiile și limitele calculabilității lor.

18
Verum et factum

Verum et factum convertuntur: formulă pentru care Giambattista Vico găsea urme semnificative în literatura latină, la Terenţiu şi Plaut, şi care azi încă poate servi drept premisă pentru epistemologiile constructiviste. Realitatea a ceva depinde de „facere", de putinţa de a duce acel ceva până la capăt printr-o acţiune. Soluţia unei probleme matematice depinde atunci de posibilitatea de a o calcula în mod eficient în timpul şi spaţiul fizice ale unei execuţii automate – singura strategie posibilă dat fiind dimensiunea mare a problemelor. Pare că nu există nimic mai sigur decât un proces care, într-un număr finit de paşi, face calculele necesare în funcţie de datele introduse. Dar oare realitatea entităţilor matematice poate fi epuizată cu adevărat în această concluzie?

Reamintim că întreaga analiză matematică şi funcţia sa de model pentru descrierea lumii fizice se bazează pe proprietăţile metrice ale corpului numerelor reale, aşa cum au fost definite de Cantor şi Dedekind. Acest corp de numere care exprimă aritmetic conceptul de continuitate are, printre proprietăţile sale speciale, pe aceea de *completitudine*. Asta înseamnă că orice şir *fundamental* de numere reale converge la un număr real, adică admite o limită care aparţine corpului numerelor reale. În schimb, corpul numerelor raţionale nu e complet, pentru că există şiruri de numere raţionale care admit o limită care nu e raţională: e cazul numerelor laterale şi diagonale al căror raport tinde la rădăcina pătrată a lui 2, care nu e raţională. Deseori se poate demonstra *existenţa*

soluției unei probleme matematice – ecuație algebrică, ecuație diferențială sau integrală – recurgând tocmai la proprietatea de completitudine: se calculează un șir de valori care aproximează soluția și se arată că acest șir e *fundamental*; conform proprietății de completitudine, limita acestui șir *există* în corpul numerelor reale.

Deocamdată admitem doar existența soluției, dar pentru asta folosim un șir de valori care o aproximează și care sunt efectiv calculabile. Demonstrația existenței soluției folosește un algoritm care-i calculează aproximările succesive. În rezumat: proprietatea teoretică de completitudine care, alături de altele, caracterizează continuul aritmetic, se aplică unor probleme fizice descrise de modele diferențiale ale căror soluții sunt căutate cu algoritmi obligați să satisfacă o anumită proprietate de convergență. Efectuarea calculelor trebuie să fie automată, din pricina dimensiunii mari a problemelor, până la evaluarea finală a unor interminabile liste de numere. Acele liste, ca și programele cu care sunt calculate, pot să nu fie direct inteligibile; ele conțin totuși, în termeni de simple șiruri de cifre, informația transmisă de model, și deci de chiar fenomenul fizic pe care acesta vrea să-l simuleze.

Calculul însuși devine, în ultimă instanță, un proces fizic, dar e dificil să-l separăm de premisele teoretice, pur matematice, care-l fac posibil. Existența *efectivă* a soluției unei probleme e, în mod cert, încredințată *eficienței* algoritmului, dar dacă încercăm să surprindem realitatea entității matematice, devine dificil să disjungem cadrele raționamentului de ale calculului, pentru că acestea se încrucișează și se susțin unul pe celălalt până ajung să formeze o teorie articulată, cu teoreme, demonstrații și algoritmi care garantează în mod complet acea realitate și chiar o impune. După cum scria Simone Weil, „real e ceea ce se impune. Demonstrația se impune mai mult decât senzația. Dar comportă o parte de convenție. E necesar să extragem neconvenționalul din matematică".[190] Într-adevăr, mult convenționalism nu se află în procedura care duce de la modelul matematic la calculul digital: natura

evenimentului fizic se transmite în mod necesar structurii ecuațiilor și a entităților matematice folosite pentru a le rezolva, ajungând să impregneze chiar și listele finale de numere calculate. La sfârșit, ceea ce s-a numit „irațională eficacitate a matematicii în științele naturale"[191] apare a fi consecința unei complexe și bine articulate combinații de proprietăți și circumstanțe care atenuează sensibil impresia inițială de accidental a posibilelor legături dintre conceptele abstracte ale matematicii și lumea fizică.

Acel *factum* apare la sfârșitul procesului de modelare și se materializează în numerele efectiv calculate, situate în memoria calculatorului; e, în același timp, o presupoziție istorică și conceptuală a teoriei continuului aritmetic care permite construcția și studiul modelului. Conceptul de tăietură și continuul aritmetic al lui Dedekind sunt consecința naturală a unui fapt primordial care se exprimă într-o construcție algoritmică: „Nu e cumva adevărat că conceptul de partiție (*tăietură* Dedekind) e precedat de un fapt pur algoritmic, anume de nevoia de a justifica și legitima anumite procese algoritmice, ca aproximarea prin exces și prin lipsă a rădăcinii pătrate a lui 2, și care se traduc tocmai prin construcția unor clase compuse din infinite numere discrete?".[192]

Într-o anume măsură, se poate susține că *verum et factum convertuntur*, adevărul coincide în final cu făcutul, dar trebuie ținut seamă și că nu e deloc ușor de dat o definiție precisă a „făcutului" sau a „efectivității" care ar trebui să constituie esența unui proces computațional. În plus, ar putea fi admisă și teza potrivit căreia „domeniul realității depășește infinit domeniul făcutului"[193], depinzând de un complex de împrejurări pentru care făcutul poate fi verificat într-un anume fel și nu într-altul. Făcutul, ca atare, rămâne indiferent la cercetarea fundamentului său. Or, acesta din urmă e ceea ce conține în mod virtual, ca principiu activ și productiv, ceea ce există în act. După cum afirmă Toma din Aquino, înainte ca ceva să existe în potențialitate, trebuie să fie ceva care să existe în act, pentru că potențialitatea nu se rezolvă în act decât pentru ceva ce deja există în act.[194]

19
Recursivitate şi invarianţă

Fenomenul creşterii nu e unul marginal, dimpotrivă, el intervine în profunzimea alcătuirii unui algoritm. Felul creşterii e decisiv pentru eficienţă. A spune că un algoritm funcţionează în mod recursiv înseamnă, mai mult sau mai puţin, următorul lucru: problema pe care o are de rezolvat algoritmul (de exemplu, produsul a două numere de câte 16 cifre) se împarte în probleme de aceeaşi natură, dar de dimensiune mai mică (produse de numere de 8 cifre) iar acestea, la rândul lor, se împart în probleme analoage, încă mai mici (produse de numere de 4 cifre). Procedeul împărţirii continuă până se ajunge la probleme elementare, de dimensiune minimă (produse de numere cu o singură cifră). De la acestea din urmă, printr-un calcul iterativ, se urcă în direcţia opusă, până se rezolvă problema pusă iniţial. Acest mod de organizare a calculului recursiv, într-o ierarhie de probleme de aceeaşi natură, dar de dimensiuni descrescătoare, e numit uneori *divide et impera*, de la vechiul adagiu latin. Dar criteriul împărţirii nu e întotdeauna, prin el însuşi, eficient. Ceea ce contează e regula care guvernează descreşterea şi succesiva creştere a dimensiunilor. Metoda lui Cramer, care reduce calculul determinantului unei matrice de dimensiune n la calculul determinanţilor unor matrice de dimensiune n-1, e complet ineficientă. În schimb, o mare varietate de algoritmi foloseşte împărţiri dihotomice, anume problema iniţială, de dimensiune n, se împarte în probleme de dimensiune $n/2$

(presupunând că n e par). În acest mod, dimensiunea calculului urmează o progresie de puteri succesive ale lui 2: creşterea dimensiunii, care urcă din nou de la problemele cele mai elementare la problema iniţială, se dublează la fiecare pas. Într-un fel, algoritmul aminteşte de arborele genealogic al Eneadei teologilor de la Heliopolis, din Egiptul antic, aşa cum e descris pe sarcofagul lui Petamon (n. 1160) la Muzeul din Cairo:

Sunt Unul care se transformă în Doi,
Sunt Doi care se transformă în Patru,
Sunt Patru care se transformă în Opt,
Apoi sunt iar Unu.

Împărţirea se făcea şi la Heliopolis tot prin puteri ale lui 2, adică $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, apoi, după un număr suficient de repetiţii, se ajungea din nou la 1, cu un parcurs în direcţie inversă, exact ca în procesul recursiv. Într-adevăr, după reducerea la un nucleu iniţial de dimensiune mică, calculul recursiv constă într-o creştere progresivă a dimensiunii care conduce către soluţia problemei – anume calculul funcţiei date. Procesul se reia de la un mic nucleu iniţial şi devine o creştere care nu schimbă forma. În Egipt, nu doar formulele teologice se bucurau, metaforic, de ideea de creştere progresivă cu puteri succesive ale lui 2. Formulele aritmetice pentru calculul produsului a două numere se bazau de regulă pe un criteriu de creştere analog.[195]

Creşterea numerelor se poate face şi prin alte metode, nu doar prin puteri succesive ale lui 2, de exemplu conform celebrului şir al lui Fibonacci, în care fiecare număr diferit de 1 e egal cu suma celor două precedente. Împărţind o problemă în subprobleme cu criteriul lui Fibonacci sau cu altul asemenea, se pot obţine avantaje computaţionale, aşa cum se demonstrează în cazul calculului paralel (în care mai multe operaţii sunt executate simultan) al unei funcţii raţionale (cât de două polinoame). Evoluţia calculului poate fi descrisă folosind un graf care se desfăşoară în spaţiu şi a cărui structură reflectă complexitatea computaţională.

Criteriul de creştere poate fi diferit de la caz la caz, dar e decisiv pentru definirea parcursului mai rapid către rezultatul final al calculului.

Iteraţia şi căutarea invarianţei sunt ingredientele necesare, regula de aur a calculului. Găsim exemple chiar şi în calculele pe care le folosesc motoarele de căutare în reţea. Fiecare pagină sau document de pe *web*, din imensa pânză de păianjen a informaţiilor la scară planetară, se reprezintă ca un nod i într-un graf dirijat de dimensiuni enorme, în care numărul de noduri e extrem de ridicat; grafului i se asociază o matrice L de dimensiuni echivalente, cu miliarde de linii şi coloane (chiar dacă e vorba despre matrice rare, cu multe elemente nule). Matricea L caracterizează graful, în sensul că elementul l_{ij} e egal cu 1 dacă nodurile i şi j sînt legate între ele, şi l_{ij} e egal cu 0 în caz contrar. Vrem o măsură a importanţei unui nod, aşa că ţinem seama de numărul de cereri care converg în timp către el. Acest criteriu se poate exprima printr-un calcul iterativ, fixând un vector x_0 de estimări conjecturale iniţiale ale importanţei nodurilor şi actualizându-l repetat cu un nou vector x prin combinaţii liniare ale valorilor de importanţă a nodurilor legate între ele, cele care trimit către nodul considerat şi cele la care poate trimite nodul însuşi. Importanţa nodului, deci a documentului *web* depinde de entitatea legăturilor. Actualizarea se exprimă prin calculul iterativ, aproximat, al vectorului propriu x corespunzător valorii proprii maxime unei matrice A care depinde de L (A vine în locul lui L pentru a face să conveargă calculul iterativ). Cum A are o structură care ne permite să ştim că valoarea sa proprie maximă e egală cu 1, avem $Ax = x$, deci x e un *punct fix* al lui A, un vector care rămâne invariant în direcţie şi în lungime ori de câte ori îi aplicăm matricea A. Astfel, soluţia problemei *web*-ului, constând în atribuirea unei importanţe mai mari sau mai mici unei pagini pentru a elabora răspunsul la o căutare generică, soluţia acestei probleme depinde de un criteriu de invarianţă.

Datorăm teoria matricelor care intervin în calcule mai ales geniului lui Oskar Perron, cel care a elaborat-o la începutul secolului

trecut din motive cu totul străine de acestea care o fac azi faimoasă prin numeroasele ei aplicații în economie, în creșterea populațiilor, sau în modelarea fisiunii nucleare. Ironia soartei vrea ca, într-o scrisoare din 1972 către un elev al său, Perron, care habar n-avea de aplicațiile viitoare, își exprima neîncrederea în informatică – domeniu care atunci se năștea.[196] Se întreba dacă informatica nu e cumva un sinonim sau o ramură secundară a „spionisticii (*Spionatik*)", cu referire evidentă la munca de decriptare a mesajelor germane căreia i se dedicase Turing în timpul războiului. Încă un caz de eficacitate irațională, involuntară a matematicii în studiul științelor naturale și artificiale, un instrument neașteptat de contrapus *hýbris*-ului numerelor care cresc nemăsurat.

Note

1 Aşa pare să creadă, între alţii, Eugene P. Wigner, într-un articol devenit faimos: „The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", în *Communcations on Pure and Applied Mathematics*, XIII, 1960.

2 Turing a fost cel care a extins ideea de algoritm ca proces, deja avansată în 1937, la algoritmii numerici şi la executarea de operaţiuni cu ajutorul unui calculator digital. Vezi A.M. Turing, „Rounding-off Errors in Matrix Processes" (1948), în *Collected Works of A.M. Turing*, vol. II, îngrijit de J.L. Britton, North-Holland, Amsterdam, 1992.

3 De exemplu la A. Schopenhauer, *Preisschrift über die Freiheit des Willens* (1839), în *Die beiden Grundprobleme der Ethik*, în *Zürcher Ausgabe. Werke in zehn Bänden*, Diogenes, Zürich, 1977, vol. VI, p. 96. „Orice *existentia* presupune o *essentia*, adică tot ceea ce *este* trebuie să şi *fie ceva*, să aibă o esenţă determinată. Un lucru nu poate să *existe* şi, în acelaşi timp, să *nu fie nimic*, ca acel *Ens metaphysicum* al scolasticilor, adică un lucru care *este* şi nu e nimic mai mult decât o *existenţă pură*, fără vreun atribut ori calitate şi, prin urmare, fără modul de acţiune determinat care decurge din acestea. Or, la fel ca *essentia* fără *existentia* (fapt explicat de Kant prin cunoscutul exemplu al celor 100 de scuzi), nici *existentia* lipsită de *essentia* nu posedă realitate." (*Eseu despre liberul arbitru*, trad. A. Diaconu, Ed. Antet, 2010, pp. 60-61).

4 O mulţime K conţinută în mulţimea numerelor complexe e un *corp de numere* dacă K conţine cel puţin un element nenul şi dacă, operând asupra elementelor lui K cu cele patru operaţii raţionale (adunare, scădere, înmulţire şi împărţire), se obţine tot un element din K. În esenţă, e vorba despre un domeniu *închis* faţă de toate cele patru operaţii raţionale.

5 Două domenii sunt *izomorfe*, deci indiscernabile, dacă există între ele o corespondenţă biunivocă g care aplică rezultatul unei operaţii între

două elemente x şi y din primul domeniu A peste rezultatul operaţiei analoage asupra corespondenţilor $g(x)$ şi $g(y)$ în al doilea domeniu B. Dacă operaţia e adunarea, avem $g(x+y) = g(x)+g(y)$. Noţiunea de „spaţiu vectorial n-dimensional peste numerele reale" e suficientă ca să individualizăm un singur obiect matematic până la izomorfisme, deoarece există o teoremă care stabileşte că orice două spaţii vectoriale n-dimensionale peste numerele reale sunt izomorfe. O situaţie analoagă apare pentru corpul numerelor raţionale Q, cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire şi cu relaţia de ordine cunoscută între fracţii ($n/m<p/q$ dacă $nq<mp$). Dacă un corp de numere K cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi cu relaţie de ordine e conţinut în orice alt corp de numere cu adunare, înmulţire şi relaţie de ordine, atunci K coincide cu Q. Vezi B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983, pp. 18-19.

6 S. Körner, *The Philosophy of Mathematics* (1960), Dover, New York, 1986, p. 36.

7 W.V. Quine, *From a Logical Point of View* (1953), ed. a II-a rev., Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1961. Cf. şi J.J. Katz, *Realistic Rationalism*, The MIT Press, Cambridge (Mass.), 1998, pp. 117-75.

8 N. Goodman, W.V. Quine, „Steps Toward a Constructive Nominalism", în *The Journal of Symbolic Logic*, XII, 1947, p. 105.

9 Toată lumea va fi de acord cu exemplul numerelor complexe, introduse de Rafael Bombelli ca urmare a studiilor despre ecuaţiile de gradul al treilea, un pas necesar pentru a stabili teorema fundamentală a algebrei conform căreia o ecuaţie algebrică are întotdeauna o soluţie. Mai precis: dacă $p(x)$ e un polinom de grad $n>0$ cu coeficienţi în corpul numerelor complexe, atunci există un număr complex z astfel încât $p(z) = 0$.

10 Această definiţie a realistului, datorată lui Michael Dummett, e citată în H. Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975, pp. 69-70. Printre matematicieni, e răspândită convingerea că există o lume *exterioară* de concepte şi teoreme pe care avem sarcina s-o explorăm.

11 Teză susţinută de H. Putnam, *ibid.*, p. 70 şi urm.

12 *Ibid.*, p. 70. Pentru Michael Dummett, aminteşte Putnam, în formularea unui realism filozofic intră ca ingredient fundamental percepţia unei lumi *exterioare* minţii noastre.

13 S. Weil, *Cahiers*, în *Œuvres complètes*, ed. îngr. de F. de Lussy, Gallimard, Paris, vol. VI, tom III, 2002, p. 179.

14 B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen and Unwin, London, 1919.

15 G. Scholem, *Über einige Grundbegriffe des Judentums*, Suhrkamp, Frankfurt a. M., 1970, pp. 90-91.

16 De proprietatea de închidere se preocupa mai ales Dedekind, cu teoria sa asupra recursivității, în lucrarea *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig, 1888.

17 Vezi A. Bürk, „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra", în *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, LVI, 1902, p. 336. Foarte importante sunt și articolele lui A. Seidenberg, începând cu „The Ritual Origin of Geometry", în *Archive for History of Exact Sciences*, I, 1961, unde sunt citate și studii ale lui G. Thibaut despre *Śulvasūtra* lui Baudhāyana: „The Śúlva-sūtra of Baudháyana, with the Commentary of Dvárakánáthayajvan", în *The Pandit*, IX, 1874; X, 1875; N.S., I, 1876-1877.

18 Pentru definiția gnomonului, vezi mai jos, capitolul 5, unde se vor clarifica relațiile dintre geometria altarelor vedice și algoritmii numerici antici și moderni.

19 G. Thibaut, „On the Śulvasútras", în *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, XLIV, 1875, p. 242.

20 Acesta e un punct crucial pentru istoria matematicii. Pentru mai multe detalii, vezi D.T. Whiteside, „Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century", în *Archive for History of Exact Sciences*, I, 1961, pp. 205-207.

21 Vezi, de exemplu, G.W. Leibniz, „Historia et origo calculi differentialis" (1714-1716), în *Mathematische Schriften*, ed. îngrijită de C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim, vol. V, 1962.

22 C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover, New York, 1959, p. 118 și urm.

23 „Autoexistentul a făcut ca orice acces extern (*parāñci khāni*) să fie incapabil [de a-l prinde]: pentru aceasta [ființa individualizată] vede [numai] lucrurile din exterior și nu intimul *ātman*" (Śaṅkara, *ad Kaṭha Upaniṣad*, II, 1, 1). Despre dorința orientată în afară (*kāma*), expresie a condiției exterioare, care se opune dorinței îndreptate către *ātman*, vezi *Taittirīya Upaniṣad*, cu comentariile lui Śaṅkara, Āśram Vidyā, Roma, 2006, pp. 42, 99, 114. În legătură cu aceasta, nu se poate să nu ne gândim la Brouwer, marele matematician olandez căruia îi datorăm unele dintre cele mai importante descoperiri ale matematicii secolului XX. Brouwer a fost părintele unei noi matematici concepute ca fruct al unei acțiuni introspective care, în același timp, nu prejudicia obiectivitatea formulelor.

24 Pentru precizări mai ample, vezi mai jos, capitolul 4.

25 Severinus Boethius, *De institutione arithmetica*, ed. îngr. de G. Friedlein, Teubner, Leipzig, 1867, p. 12: „[...] *eum quoque numerum necesse est in propria semper sese habentem aequaliter substantia permanere, eumque compositum non ex diversis* [...] *sed ex se ipso videtur esse compositus*".

26 I. Toth, *I paradossi di Zenone nel „Parmenide" di Platone* (1994), Bibliopolis, Napoli, 2006, p.18.

27 K. Gaiser, *La dottrina non scritta di Platone*, Vita e Pensiero, Milano, 1994, p. 15 (ed. or. *Platons ungeschriebene Lehre*, Klett, Stuttgart, 1963).

28 Pentru felul cum foloseşte Croce expresia aceasta, mai ales în polemica sa cu Enriques, vezi L. Russo şi E. Santoni, *Ingegni minuti: una storia della scienza in Italia*, Feltrinelli, Milano, 2010.

29 O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (1951), Dover, New York, 1969, p. 35.

30 A.P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, Vrin, Paris, 1976, p. 47.

31 Metoda despre care se crede că l-a condus pe scrib se rezuma în formula iterativă $x_{k+1} = (x_k + y_k)/2$, cu $x_0 = 3/2$ şi $y_k = 2/x_k$, cu k luând valorile 0, 1, 2, … . Numărul $\sqrt{2}$ va fi atunci mai mare decât y_k şi mai mic decât x_k. Astfel, intervalul $[x_k, y_k]$ îl include pe $\sqrt{2}$ pentru orice k şi devine din ce în ce mai mic odată cu creşterea lui k. Formula e o rescriere a celei pe care au folosit-o Newton şi Raphson în secolul XVII. Vezi *Mathematical Cuneiform Texts*, îngr. de O. Neuberger, A. Sachs, A. Goetze, American Oriental Society and American School of Oriental Research, New Haven (Conn.), 1945, pp. 42-43; D.H. Fowler, E. Robson, „Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context", în *Historia Mathematica*, XXV, 1998; N. Mackinnon, „Hommage to Babylonia", în *The Mathematical Gazette*, LXXVI, 1992.

32 S. Weil (*Cahiers*, în *Œuvres complètes*, cit., vol. VI, tom I, 1994, p. 129) intuia că ar fi posibil ca orice fapt matematic să se raporteze la numai aceste două puncte principale.

33 Conform traducerii lui E. Bréhier, citat în Aristote, *La Métaphysique*, îngr. de J. Tricot, Vrin, Paris, 1970, vol. I, p. 23.

34 Chantraine traduce *ousia* cu „realitate", „substanţă", „esenţă".

35 M. Heidegger, „Vom Wesen und Begriff der *Phýsis*. Aristoteles, Physik B 1" (1939), în *Gesamtausgabe*, Klostermann, Frankfurt a. M., vol. IX: *Wegmarken*, îngr. de F.-W. von Herrmann, 1976, p. 272.

36 *Ibid.*, pp. 278-79.

37 K. Kerényi, *Dionysos* (1976), Klett-Cotta, Stuttgart, 1994, p. 25.

38 Numenius, fr. 2 în E. des Places, *Numénius. Fragments*, Coll. Budé, Paris, Les Belles Lettres, 1973.

39 Archimede, *De sphaera et cylindro*, II, p. 65, r. 15-16, ed. Mugler.

40 C.P. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, cit., pp. 193-94.

41 Pentru aceste definiţii se pot consulta manuscrisele inedite la Cambridge University Library (CUL). În particular, vezi CUL, Newton Papers, ms. Add. 3963, f. 4*tr*. Pentru explicaţii mai ample, vezi D.T. Whiteside,

„Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century", cit., p. 375.

42 În gândirea platoniciană, sufletul are această semnificație, de principiu de întreținere și coeziune a corpurilor care, în lipsa lui, ar fi supuse unei schimbări neîncetate și, până la urmă, s-ar dezintegra.

43 A. Seidenberg, „The Ritual Origin of Geometry", cit., p. 509.

44 M. Proust, *Du côté de chez Swann*, în *À la recherche du temps perdu*, îngr. de J.-Y. Tadié, Gallimard, Paris, vol. I, 1987, p. 182 („realitatea nu se formează decât în memorie", trad. Irina Mavrodin, Editura Univers, București, 1987). (*N. t.*).

45 E vorba despre așa-numitele *metode newtoniene*. Pentru a calcula minimul local al unei funcții $f(x)$, unde x e un vector cu n componente reale, se crește x pas cu pas de-a lungul unei direcții d care face să descrească funcția, la fel cum s-ar coborî într-o vale plecând din vârful unui deal prin mici deplasări, alegând de fiecare dată o anume direcție de coborâre. Iterația se rezumă la formula $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, dând o valoare inițială x_0, unde λ_k e un număr care fixează, pentru orice k, lungimea pasului în direcția d_k. Se arată că dacă d_k e *o direcție arbitrară de coborâre* a lui f, astfel încât f atinge în x_{k+1} o valoare inferioară celei din x_k, atunci d_k e soluția unui sistem de ecuații liniare a cărui matrice de coeficienți A_k e simetrică și pozitiv definită. Relația se scrie acum $x_{k+1} = x_k + A_k^{-1} g_k$, unde A_k^{-1} e inversa lui A_k și g_k e vectorul derivatelor de ordinul 1 ale lui f (așa-numitul gradient) calculate în x_k. Formula generalizează schema lui Newton pentru rezolvarea unei ecuații $f(x) = 0$, adică (pentru $n = 1$) $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, care, la rândul său, derivă din tehnica de creștere gnomonică a pătratului. Vezi C. Di Fiore, S. Fanelli, P. Zellini, „Low complexity secant quasi-Newton minimization algorithms for nonconvex functions", în *Journal of Computational and Applied Mathematics*, CCX, 2007, p. 172.

46 Exemplul cel mai simplu e acela al rădăcinii pătrate a unui număr m. Dacă $m = 2$, metoda lui Newton constă în calcularea fracțiilor care-l aproximează pe $\sqrt{2}$ iterativ, în pași succesivi, după formula $a_{k+1} = (a_k^2+2)/2a_k$, cu k luând valorile 0, 1, 2,..., și aproximarea inițială a_0, fixată dintru început, în general între 1 și 2. Dacă $a_k = p_k/q_k$, atunci, calculând, obținem $a_{k+1} = (p_k^2+2q_k)/2p_kq_k$ și deci numărătorul și numitorul cresc pătratic. La fiecare pas k, numărul cifrelor aproape se dublează.

47 T.L. Heath, „Commentary" la *The Thirteen Books of Euclid's "Elements"*, Dover, New York, 1956, vol. I, p. 348.

48 *Mathematical Cuneiform Texts*, cit., p. 130.

49 J. Høyrup, *Pythagorean „Rule" and „Theorem" – Mirror of the Relation between Babylonian and Greek Mathematics*, Roskilde University, Roskilde, 1999 (www. Academia.edu/3131799/).

50 Vezi A. Bürk, „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra", în *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, LV, 1901, p. 556 şi „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra", cit., LVI, 1902, p. 329; O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike* (1957), Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, ed. a II-a revizuită, 1966, p. 33.

51 A. Bürk, „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra", cit., LVI, 1902, p. 327.

52 J. Høyrup, „Dýnamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7", în *Historia Mathematica*, XVII, 1990, p. 208. Høyrup aminteşte că Taisbak interpretează *dýnamis* ca *extensie*.

53 A. Bürk, „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra", cit., LVI, 1902, p. 329.

54 M. Heidegger, „Die Frage nach der Technik" (1953), în *Gesamtausgabe*, cit., vol. VII: *Vorträge und Aufsätze*, îngr. de F.-W. von Herrmann, 2000, p. 11 şi urm.

55 Iamblichos, *In Nicomachi arithmeticam introductionem*, Leipzig, Teubner, p. 11.

56 D.J. O'Meara, *Pythagoras Revived*, Clarendon Press, Oxford, 1989, p. 44.

57 S. Weil, *Cahiers*, în *Œuvres complètes*, cit., vol. VI, tom II, 1997, p. 74.

58 Calculul rapoartelor definite de numere diagonale laterale pentru aproximarea lui $\sqrt{2}$ începea cu unitatea, pe care Theon din Smirna (secolele I-II d.Cr.) o numea *spermatikòs lógos*.

59 D.J. O'Meara, *Pythagoras Revived*, cit., p. 62.

60 M. Psellos, *Physical Numbers*, în *On Phytagoreanism V-VII*, *ibid.*, pp. 218-19.

61 B. Snell, *La cultura greca e le origini del pensiero europeo*, Einaudi, Torino, 1963, pp. 43 urm. (ed. orig. *Die Entdeckung des Geistes*, Claassen & Goverts, Hamburg, 1946).

62 S. Weil, *Cahiers*, în *Œuvres complètes*, cit., vol. VI, tom IV, 2002, p. 336.

63 J.W. von Goethe, *Gott und Welt, Urworte. Orphisch*, în *Werke. Hamburger Ausgabe in 14 Bänden*, îngr. E. Trunz, dtv, München, vol. I, 1998, p. 359. (Traducere în românește de Lucian Blaga.)

64 F. Nietzsche, *Dincolo de bine şi de rău*, trad. Radu Gabriel Pârvu, Ed. Humanitas, Bucureşti, 2015, p. 20. Vezi P. Hadot, *Le voile d'Isis*, Gallimard, Paris, 2004, p. 208; vezi şi M. Heidegger, *Seminare*, în *Gesamtausgabe*, cit., vol. XV, îngr. de C. Ochwadt, p. 331.

65 T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics* (1921), Dover, New York, vol. I, 1981, p. 279; H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton University Press, Princeton, 1949, p. 42; A. Grünbaum, „Can an Infinitude of Operations be performed in a Finite Time?", în *Philosophical Problems of Space and Time*, Reidel, Dordrecht, ed. a II-a adăugită, 1973.

66 Un segment finit e infinit prin diviziune (*katà diaíresin*), în timp ce o dreaptă e infinită prin extreme (*toîs eschátois*).

67 T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, cit., p. 276.

68 *Loc. cit.*

69 A.N. Whitehead, *Process and Reality* (1929), Free Press, New York, 1969, pp. 84-85.

70 F. Cajori, „The History of Zeno's Arguments on Motion", în *The American Mathematical Monthly*, XXII, 1915.

71 B. Russell, *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1903.

72 G. Colli, *Zenone di Elea*, Adelphi, Milano, 1998, p. 121.

73 Citat în A.N. Whitehead, *Process and Reality*, cit., p. 84.

74 *Ibid.*, p. 76.

75 Henri Poincaré, *La Science et l'hypotèse* (1902), Flammarion, Paris, 1968, p. 51.

76 Numărul $\sqrt{2}$ e deci asociat cu o construcţie euclidiană, cu rigla şi compasul. Aşa cum e bine ştiut, nu toate numerele iraţionale (algebrice) corespund unor construcţii euclidiene. Acest fapt poate avea consecinţe asupra valorii de realitate pe care decidem s-o atribuim numerelor, dar nu e locul aici pentru o discuţie asupra acestui aspect al ontologiei numerelor.

77 A.N. Whitehead, *Process and Reality*, cit., p. 89.

78 D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Springer, Berlin, vol. I, 1934, pp. 15-17. Citat în S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, New York, 1952, pp. 54-55.

79 Euclid, *Elementele*, I, 1: „Un punct e ceea ce nu are părţi". Termenul *semeîon*, folosit de Euclid, pare să atribuie unui punct un grad mai mic de realitate decât termenul aristotelic *stigmé*, care trimite la un fel de direcţionare. Cfr. T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's „Elements"*, vol. I, cit., pp. 155-56.

80 J. Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Teubner, Leipzig-Berlin, 1924.

81 *The Mānava- Śrautasūtra*, trad. engl. de J.M. van Gelder, The Śata-Piţaka Series, vol. XXVII, International Academy of Indian Culture, New Delhi, 1963, p. 308.

82 *Ibid.*, p. 300. Formula aminteşte de analoaga formulă platonică „mai mult şi mai puţin", recurentă în Dialoguri.

83 W. Knorr, „Aristotle and Incommensurability: Some Further Reflections", în *Archive for History of Exact Sciences*, XXIV, 1981.

84 Avem $l = d'+l'$ pentru că d', diagonala DF a lui Q', e egală cu dublul laturii pătratului de diagonală l', ($d' = 2(l'/\sqrt{2}) = \sqrt{2}l'$) iar $l' = CF = EF$ deoarece triunghiurile BCF şi BFE sunt congruente. Vezi W. Knorr, „Aristotle and Incommensurability: Some Further Reflections", cit., şi

H. Rademacher, O. Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Springer, Berlin, 1933.

85 Acest raţionament prin absurd, analog, pe de o parte, cu cel din *metoda exhaustiunii*, se bazează pe axioma lui Arhimede („date două mărimi omogene, există întotdeauna un multiplu al celei mai mici care o depăşeşte pe cea de-a doua"), din care decurge următoarea teoremă a lui Euclid (*Elementele*, X, 1): „Date două mărimi neegale, dacă din cea mai mare se scade mai mult decât jumătate şi se continuă în acest mod, se va ajunge la un moment dat la o mărime mai mică decât cea mai mică". În cazul pătratului, dacă ar exista o măsură comună *m*, cu *antanairesis* s-ar calcula un rest nenul mai mic decât *m* şi divizibil prin *m*: o absurditate. Axioma lui Arhimede exclude existenţa infinitezimalelor care, adunate de oricâte ori, nu pot depăşi niciodată un segment de lungime dată. Nici o asemenea entitate nu poate defini o măsură comună pentru două mărimi.

86 Mai precis, avem $d = l + l' = 2l' + d'$, $l = l' + d'$ şi $l' = d - l$, $d' = 2l - d$, unde d, l şi d', l' sunt diagonala şi latura pătratului mai mare, respectiv mai mic. Vectorul de componente d şi l se obţine înmulţind matricea M cu elementele 1 şi 2 pe prima linie, 1 şi 1 pe a doua linie cu vectorul de componente d', l', în timp ce vectorul de componente d', l' se obţine înmulţind inversa lui M cu vectorul de componente d şi l. Relaţiile *geometrice* între diagonale şi laturi sugerează o procedură *numerică*. *Numerele* d şi l se pot calcula recursiv fixând pentru ambele valoarea iniţială 1 şi folosind relaţiile precedente în sensul unei *creşteri* progresive a pătratelor. Primele valori calculate vor fi, respectiv, 3 şi 2. Raportul $d:l$ va lua deci valorile 1:1, 3:2, 7:5, 17:12, 41:39, în care numerele d şi l *cresc* după legea recursivă descrisă mai sus.

87 Ce se înţelegea prin *raport* $d:l$ se poate interpreta şi ca *fracţia* d/l, utilizarea unităţii de măsură egală cu $1/l$ fiind implicită. Fracţia 17/12 înseamnă o cantitate egală cu de 17 ori unitatea de măsură egală cu 1/12. Când l creşte, unitatea de măsură $1/l$ descreşte şi scade, de asemenea, distanţa dintre d/l şi $\sqrt{2}$: alt indiciu pentru combinarea lui „mare" şi „mic" care semnalează natura *ápeiron*-ului platonician.

88 Vezi P. Zellini, *Gnomon*, Adelphi, Milano, 1999, pp. 343-44, 384-85.

89 Lucru bine pus în evidenţă de Simone Weil, cu referiri teologice precise: „Sfântul Ioan nu spune: vom fi fericiţi pentru că îl vom vedea pe Dumnezeu; ci: vom fi asemenea lui Dumnezeu, pentru că-l vom vedea aşa cum este [1 Ioan, III, 2: *scimus quoniam cum apparuerit, similes ei erimus, quoniam videbimus eum, sicuti est*]. Vom fi un bine pur. Nu vom mai exista. Dar în acest nimic care e la limita binelui vom fi mai reali decât în orice moment al vieţii noastre terestre. În timp ce binele care e la limita răului e lipsit de realitate. Realitatea şi existenţa sunt

două lucruri distincte" (*Cahiers*, în *Œuvres complètes*, vol. VI, tom IV, cit., p. 214).

90 Avem $d^2 = 2l^2 \pm 1$ și deci raportul d^2/l^2 converge la 2 când l crește nemărginit.

91 S. Weil, *Cahiers*, în *Œuvres complètes*, vol. VI, tom III, cit., p. 139.

92 I. Thomas, *Greek Mathematical Works* (1939), Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1967, vol. I, pp. 134-35.

93 Numere folosite de calculator de forma $(d_1\ d_2 \quad d_t)B^r$, unde B e baza în care reprezentăm numerele. Astfel, mărimea numărului e reprezentată nu de cantitatea de cifre, ci de exponentul r.

94 *Stabilitatea* unei proceduri de calcul depinde de modul în care se propagă în operațiile aritmetice individuale eroarea provenită din rotunjire. Numărul acestor operații, cel mai adesea inaccesibile omului, e de obicei extrem de mare.

95 De exemplu, dacă a și b sunt numere foarte mari, în prima procedură, produsul $a \times b$ poate fi un număr prea mare pentru memoria calculatorului, cauzând deci *overflow*. Acest inconvenient, care ar stopa procesul, ar putea să nu apară în procedura a doua, dacă c ar fi suficient de mic.

96 A. Bürk, „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra", cit., LV, 1901, p. 557. E surprinzătoare apropierea de Augustin care, în *Solilocvii*, arată cum din existența figurilor geometrice se poate infera existența adevărului și a imortalității sufletului, și deci a inteligenței care le-a conceput. La o concluzie analoagă conduc discursurile lui Platon despre *anámnesis* ilustrată în procedeul de dublare a unui pătrat (*Menon*, 85 d).

97 G. Cantor, „Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques", în *Acta Mathematica*, II, 1883, p. 337.

98 B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, cit., „Abschlussbemerkungen zu Kapitel 2"

99 *Loc. cit.*

100 G. Cantor, „Fondements d'une théorie générale des ensembles", în *Acta Mathematica*, II, 1883, p. 930. Cursivele aparțin autorului.

101 P.E.B. Jourdain, „Introduction" la G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1955, p. 67. Cursivele aparțin autorului.

102 J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1979, pp. 126-28.

103 G. Frege, *Die Grundlagen de Arithmetik*, Koebner, Breslau, 1884 (pt. versiunea rom., *Fundamentele aritmeticii*, Editura Humanitas, București, 2000, trad. Sorin Vieru).

104 I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft. Zweite Auflage 1787*, în *Werke. Akademieausgabe*, Reimer, Berlin, vol. III, 1904, p. 301. (trad. N. Bagdasar, E. Moisuc, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, p. 497.)

105 H. Bergson, *La pensée et le mouvant*, în *Œuvres*, ed. îngr. de A. Robinet, Presses Universitaires de France, Paris, 1959, p. 1254.

106 *Ibid.*, p. 1257.

107 H. Bergson, *Essai sur les données immédiates de la conscience*, în *Œuvres*, cit., p. 72.

108 N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, (1942: prima redactare, cu circulaţie limitată; 1949: redactare mai amplă, ţinând seama de articolele lui N. Levinson apărute în revistă în 1943), The MIT Press, Cambridge (Mass.), 1949. Matricele lui Toeplitz intervin într-un articol al lui Levinson care simplifică şi clarifică în multe aspecte articolul originar al lui Wiener: „The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction", în *Journal of Mathematics and Physics*, XXV, 1946; republ. ca Appendix B în N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, cit.

109 Inversa unei matrice A cu n linii şi n coloane e o matrice B cu proprietatea că produsul lui B cu A e egal cu matricea identitate I (care are 1 pe diagonala principală şi 0 în rest). Se scrie atunci $B = A^{-1}$. Dacă A e matricea coeficienţilor unui sistem de ecuaţii liniare, cunoaşterea inversei sale A^{-1} ne permite să calculăm uşor soluţia sistemului, ca un simplu produs dintre A^{-1} cu vectorul termenilor cunoscuţi. Vezi mai jos, nota 165.

110 Vezi R. Smith, „The Mathematical Origins of Aristotle's Syllogistic", în *Archive for History of Exact Sciences*, XIX, 1978.

111 H. Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, de Gruyter, Berlin-Leipzig, 1928, par. 9. Reichenbach susţine că valoarea normativă a matematicii euclidiene stă mult mai mult în logica demonstraţiei decât în construcţia vizualizabilă a figurilor. Prin analogie, ne putem gândi la teza discutată pe larg că matematica *Elementelor* lui Euclid e o algebră geometrică.

112 Vezi, de exemplu, R. Courant, H. Robbins, *Ce este matematica?*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1969 (ed. orig. *What is Mathematics?*, Oxford University Press, London, 1941).

113 Dedekind a fost primul care, în 1858, a conceput o teorie a numerelor reale, indicând drept decisivă proprietatea de *completitudine*. Tratatul său fundamental *Continuitate şi numere iraţionale*, din 1872, reia pe scurt ideile esenţiale.

114 Vezi T.L. Heath, „Commentary" la *The Thirteen Books of Euclid's „Elements"*, cit., vol. II, p. 125.

115 A spune că raportul *a:b* între două *mărimi* *a* și *b* e mai mic decât raportul *m:n* dintre două *numere* întregi *m* și *n* înseamnă că $na<mb$. La fel pentru relațiile de egalitate sau de mai mare.

116 Pentru un discurs cuprinzător despre *antanaíresis* în matematica preeuclidiană, vezi mai cu seamă D.H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

117 B. Riemann, *Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei* (ed. or. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Dieterichsche Buchhandlung, Göttingen, 1867). (Pt. o versiune rom., vezi de exemplu L. Ornea http://gta.math.unibuc.ro/pages/riemann.pdf.)

118 Vezi mai sus, nota 115, pentru a înțelege cum se stabilește o relație de ordine (mai mic sau mai mare) între un raport între *mărimi* și un raport între *numere*.

119 Vezi G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers* (1938), ed. a V-a, Oxford University Press, Oxford, 1979, pp. 138-39.

120 S. Weil, *Œuvres complètes*, cit., vol. VII, tom I, 2012, p. 465 (cursivele sunt ale autorului). Pe această temă, vezi și R. Calasso, *Il Cacciatore Celeste*, Adelphi, Milano, 2016, p. 272.

121 A.M. Turing, „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", în *Proceedings of the London Mathematical Society*, seria a 2-a, XLII, 1937; „A Correction", *ibid.*, seria a 2-a, XLIII, 1938.

122 W.V. Quine, *Set Theory and its Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1963.

123 Vezi și S.C. Kleene, *Mathematical Logic*, Wiley, New York, 1967, cap. II.

124 K. Scheel, *Der Briefwechsel Richard Dedekind–Heinrich Weber*, îngr. de T. Sonar cu colaborarea lui K. Reich, de Gruyter, Berlin, 2014, p. 277, cursivele autorului; B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, cit., p. 65.

125 Există un izomorfism între mulțimea numerelor algebrice (rădăcini ale unei ecuații algebrice, adică un polinom egalat cu zero) și sistemul numerelor zecimale de forma $a \times 10^{-k}$, cu *a* întreg și *k* natural. În consecință, mulțimea numerelor algebrice are goluri.

126 G. Cantor, „Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques", cit., p. 340.

127 G. Cantor, „Fondements d'une théorie générale des ensembles", cit., p. 393.

128 *Ibid.*, p. 403.

129 Proprietatea arhimediană, pusă deja în evidență de matematicienii greci, are loc atunci când, dați *x* și *y*, cu *x* mai mic decât *y*, există un multiplu al lui *x* care-l depășește pe *y*. Se arată că un corp de numere ordonat și complet satisface această proprietate.

130 B. Artmann, *Der Zahlbegriff*, cit., p. 33.

131 U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Nistri, Pisa, 1878, p. 4.
132 *Ibid.*, p. 6.
133 A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia mathematica to *56* (1962), Cambridge University Press, Cambridge, 1973, pp. 71-72.
134 W.V. Quine, *Set Theory and its Logic*, cit., p. 3.
135 J.W. Dauben, *Georg Cantor*, cit., pp. 221-22.
136 F. Nietzsche, *Frammenti postumi, 1887-1888*, în *Opere*, Colli e Montivani, Adelphi, Milano, vol. VIII, tom II, 1974, p. 47.
137 R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), cit., 1939, p. iii.
138 *Ibid.*, p. vi. Cursivele mele.
139 R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1872, pp. 18, 20-22.
140 S. Pincherle, „Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. C. Weierstrass", în *Giornale di Matematiche*, XVIII, 1880, pp. 186, 190, 191.
141 Citat în F. Cajori, *A History of Mathematical Notations* (1928-1929), Dover, New York, 1933, vol. II, p. 333. Merită comparat cu îndemnul adresat de Benedetto Croce filozofilor: „Gândiți, nu calculați! *Qui incipit numerare, incipit errare!*" (B. Croce, *Filosofia della pratica. Economia ed etica,* în *Filosofia dello spirito*, Laterza, Bari, vol. III, 1909, ed. a II-a revăzută de autor, 1915, p. 270). E aici implicită o observație analoagă celei a lui Whitehead, dar valorizată negativ.
142 G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940).
143 R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, cit., pp. 18-19.
144 *„Das Kontinuum als Medium freien Werdens"*: este expresia lui Hermann Weyl. Vezi H. Weyl, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", în *Mathematische Zeitschrift*, X, 1921.
145 F. Nietzsche, *Frammenti postumi, 1888-1889*, în *Opere*, cit., vol. VIII, tom III, 1974, p. 162.
146 Vezi D. Hilbert, „Sull'infinito", în *La filosofia della matematica*, îngr. C. Cellucci, Laterza, Bari, 1967, p. 179 (ed. or. „Über das Unendliche", în *Mathematische Annalen*, XCV, 1926).
147 É. Borel, „Les «paradoxes» de la théorie des ensembles", în *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, seria a 3-a, XXV, 1908.
148 Vezi, de exemplu V.A. Uspensky, „Kolmogorov and Mathematical Logic", în *The Journal of Symbolic Logic*, LVII, 1992, p. 393.
149 Vezi E. Zermelo, „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", în *Mathematische Annalen*, LXV, 1908. Pentru teoria lui von

Neumann se poate consulta P.R. Halmos, *Naive Set Theory* (1960), Springer, New York, 1974.

150 Este, de exemplu, cazul numerelor diagonale d și laterale l. Se poate calcula k în așa fel încât distanța dintre 2 și raportul $d^2:l^2$ să fie mai mic decât un ε oricât de mic dacă l e mai mare decât k, pentru că știm că acea distanță e egală cu $d^2/l^2-2 = \pm 1/l^2$. Ca urmare, șirul de rapoarte d^2/l^2 e un șir *fundamental* în sensul lui Cantor. Totuși, după cum arată Brouwer, nu e întotdeauna posibil să calculăm *efectiv* indicele k pentru care distanța dintre a_{n+p} și a_n e mai mică decât ε dacă $n>k$.

151 G. Peano, „Interpolazione nelle tavole numeriche", în *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, LIII, 1917-1918, p. 693.

152 Vezi R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II: *Partial Differential Equations* de R. Courant, Interscience, New York, 1962, p. 229 (ed. or. *Methoden der mathematischen Physik*, Springer, Berlin, 1924), p. 153.

153 *Ibid.*, p. 230.

154 B. Parlett, „Progress in Numerical Analysis", în *SIAM Review*, XX, 1978, pp. 448-49.

155 A.A. Markov Jr, „On Constructive Functions", în *American Mathematical Society Translations*, seria a 2-a, XXIX, 1963, pp. 163-64.

156 A.A. Markov Jr, „The Theory of Algorithms", *ibid.*, seria a 2-a, XV, 1960, p. 3.

157 H. Rogers Jr, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York, 1967, p. 31.

158 Pentru mai multe detalii, se poate consulta R. Courant, H. Robbins, *Ce este matematica?*, cit.

159 Vezi M.S. Paterson, „Efficient Iterations for Algebraic Numbers", în *Complexity of Computer Computations*, îngr. de R.E. Miller, J. Thatcher, Plenum Press, New York-London, 1972, și D. Bertaccini, C. Di Fiore, P. Zellini, *Complessità e iterazione*, Bollati Boringhieri, Torino, 2013, p. 355. Într-o metodă iterativă de ordinul p care calculează la fiecare pas k o expresie rațională g care procură o valoare aproximantă p/q pentru o rădăcină z a unei ecuații algebrice (*ordinul* măsoară viteza cu care ne apropiem de z), pentru k suficient de mare, numitorul q depășește valoarea Ld^s cu $s = r^k$, pentru orice $r < p$, unde L și d sunt constante, cu d mai mare decât 1.

160 De exemplu, grație unor procese automate asemănătoare rotunjirii, fracția 1330/1113 se poate aproxima cu fracția 7/6. Ar fi costisitor să simplificăm o fracție împărțind numărătorul și numitorul prin aceiași factori. În plus, probabilitatea ca două numere întregi alese la întâmplare să fie prime între ele e destul de ridicată, egală cu $6/\pi^2 \approx 0{,}60793$. Vezi D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley,

Reading (Mass.), vol. II, ed. a II-a, 1981, pp. 315, 324. Vezi şi P. Henrici, „A Subroutine for Computations with Rational Numbers", în *Journal of the Association for Computing Machinery*, III, 1956, pp. 6-9.

161 D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), vol. II, 1969, p. 292.

162 Să considerăm o singură ecuaţie algebrică, definită de un polinom în x egalat cu zero. Dacă polinomul are grad mai mare decât 4, ecuaţia nu are, în general, o soluţie în formă analitică. Soluţiile trebuie deci aproximate cu proceduri numerice care calculează şiruri de numere raţionale care se apropie de soluţii până la precizia cerută. Într-o situaţie asemănătoare sunt ecuaţiile diferenţiale sau integrale, ale căror soluţii nu se pot exprima cu formule analitice şi trebuie aproximate numeric. Scop în care e necesară mai ales rezolvarea unor sisteme de ecuaţii liniare cu matrice de coeficienţi de dimensiune mare.

163 Vezi W. Gautschi, „Computational Aspects of Three-Term Recurrence Relations", în *SIAM Review*, IX, 1967. De exemplu, o relaţie recurentă cu trei termeni de forma $y_{k+1} = ay_k + by_{k-1}$, cu care se poate calcula y_k, pentru $k = 2, 3, \ldots$, odată ce sunt date valorile iniţiale y_0 şi y_1, e caracterizată adesea de fenomene de instabilitate, adică de creşterea necontrolată a erorii. Cu strategii iterative analoage se rezolvă, în discret, sisteme simple de ecuaţii diferenţiale, caz în care perturbaţiile asupra valorilor iniţiale pot cauza creşteri exponenţiale ale termenilor, cu comportare oscilatorie care provoacă fenomene de instabilitate numerică. Pentru asta, vezi G. Dahlquist, „33 Years of Numerical Instability, Part I", în *Bit Numerical Mathematics*, XXV, 1985, şi G. Dahlquist, Åke Björck, *Numerical Methods* (1974), Dover, New York, 2003, pp. 342, 373.

164 Citat în A. Knoebel, R. Laubenbacher, J. Lodder, D. Pengelley, *Mathematical Masterpieces*, Springer, New York, 2007, p. 65.

165 În vectorul w, pe poziţia i se află suma (după k) a produselor $a_{ik} \times v_k$, unde v_k e elementul de pe poziţia k din vectorul v. La fel, produsul dintre două matrice pătrate cu n linii şi m coloane, A şi B, e matricea pătrată C, cu aceleaşi dimensiuni ca şi A şi B, în care elementul c_{ij} e suma (după k) a tuturor produselor $a_{ik} \times b_{kj}$. Dacă produsul a două matrice, A şi B, e matricea identică I, atunci B e inversa lui A, A se cheamă *inversabilă* şi se scrie $B = A^{-1}$. Vectorul soluţie x al unui sistem de ecuaţii liniare $Ax = b$, cu matricea coeficienţilor A inversabilă, e produsul $A^{-1}b$. Vezi mai sus, nota 109.

166 V.Y. Pan, „Complexity of Parallel Matrix Computations", în *Theoretical Computer Science*, LIV, 1987.

167 G. Strang, „Wavelets", în *American Scientist*, LXXXII, 1994.

168 Vezi J.H. Wilkinson, „Some Comments from a Numerical Analyst" (1970 Turing Lecture), în *Journal of the Association for Computing*

Machinery, XVIII, 1971. Despre fazele iniţiale ale dezvoltării calculului matriceal şi despre rolul cărţii lui Whitakker şi Robinson, vezi O. Taussky, „How I Became a Torchbearer for Matrix Theory", în *The American Mathematical Monthly*, XCV, 1988. Pentru primele semnalări ale ineficienţei metodei lui Cramer, vezi G.E. Forsythe, „Solving Linear Algebraic Equations Can Be Interesting", în *Bulletin of the American Mathematical Society*, LIX, 1953.

169 D. Hilbert, „Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms", în *Acta Mathematica*, XVIII, 1894.

170 Expresia erorii conţine puteri ale variabilei x care, pentru x cuprins între 0 şi 1, sunt aproape liniar dependente. Din acest motiv, strategia de minimizare a erorii conduce la un sistem de ecuaţii liniare de matrice H ale cărei linii sunt aproape liniar dependente, cu consecinţa că determinantul lui H e foarte aproape de 0, un semn al relei condiţionări a lui H. Într-adevăr, inversul indicelui de condiţionare al unei matrice H e egal cu distanţa minimă dintre matricea H şi mulţimea matricelor de determinant nul. Aşadar, indicele de condiţionare e cu atât mai mare cu cât această distanţă e mai mică. Vezi J.W. Demmel, „On Condition Numbers and the Distance to the Nearest Ill-posed Problem", în *Numerische Mathematik*, LI, 1987.

171 Forma aceasta a matricei apare în G.E. Forsythe, „Pitfalls in Computation, or why a Math Book isn't Enough", *The American Mathematical Monthly*, LXXVII, 1970. Vezi şi G.E. Forsythe, C.B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1967.

172 Vezi mai sus, nota 165, pentru expresiile care definesc produsul dintre o matrice şi un vector. Soluţia sistemului de 6 ecuaţii se obţine înmulţind matricea H^{-1} cu 6 linii şi 6 coloane cu vectorul b, obţinând vectorul soluţiilor x al cărui al cincilea element x_5 e dat de o expresie care conţine termenul $4410000b_5$, unde b_5 e al cincilea element al vectorului b. Dacă b_5 suferă o variaţie mică, o creştere pozitivă, să zicem, de 10^{-6}, în loc de $4410000b_5$ vom avea $4410000(b_5+10^{-6})$; astfel, în urma unei perturbări cu doar 10^{-6}, x_5 variază cu 4,41. O creştere analoagă a erorii poate apărea, desigur, pentru orice element suficient de mare al inversei lui H.

173 Pentru mai multe detalii, vezi N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 1996, p. 177.

174 O matrice A simetrică (adică astfel încât $a_{ij} = a_{ji}$) cu elemente reale se zice *pozitiv definită* dacă $x^TAx>0$ pentru orice vector nenul x cu componente reale.Matricea A e pozitiv definită dacă şi numai dacă toate valorile ei proprii sunt (reale şi) pozitive.

175 Mai precis, dacă X e inversa *calculată* a lui A, distanţa dintre AX şi matricea identitate I nu depăşeşte valoarea $14{,}24(\lambda_{max}/\lambda_{min})n^2\beta^{-s}$, unde

λ_{max} şi λ_{min} sunt, respectiv, valorile proprii maximă şi minimă ale lui A, iar calculul se desfăşoară în aritmetica în virgulă mobilă cu numere de s cifre semnificative şi bază de reprezentare egală cu β.

176 J.H. Wilkinson, „Modern Error Analysis", în *SIAM Review*, XIII, 1971, p. 550. Wilkinson menţionează şi contribuţia importantă adusă la analiza erorilor de Wallace Givens, cel care, primul, în 1954, a pus la punct o analiză *inversă* a erorii, constând în *reflectarea* asupra matricei a erorilor acumulate în cursul calculului: algoritmul aproximat e conceput ca unul care inversează nu matricea A, ci o matrice $A+\Delta A$, adică o matrice perturbată cu eroarea ΔA.

177 A.M. Turing, „Rounding-off Errors in Matrix Processes", cit.

178 Tot de indicele de condiţionare μ depinde, în multe cazuri, eficienţa unor cunoscute metode iterative, în particular viteza de convergenţă a soluţiei.

179 *Norma euclidiană* a lui A, numită şi *normă spectrală*, pentru că dacă A e pozitiv definită, coincide cu raza sa spectrală, adică cu valoarea sa proprie maximă, e mai mică sau egală cu norma Frobenius.

180 *Poate* fi, dar nu *este* în mod necesar. Prin însăşi definiţia ei, eroarea nu poate fi cunoscută, i se pot însă stabili limitele. Dar dacă aceste limite sunt compatibile cu o eroare ridicată, certitudinea în legătură cu fiabilitatea procesului de calcul scade. Există însă metode de *condiţionare*, tehnici care intervin asupra matricei pentru a modifica distribuţia valorilor proprii. Există azi o literatură enormă despre aceste tehnici.

181 Vezi mai sus, nota 25.

182 A.A. Markov Jr, „The Theory of Algorithms", cit., p. 1.

183 H.H. Goldstine, J. von Neumann, „On the Principles of Large-Scale Computing Machines", în *John von Neumann Collected Works*, îngr. de A.H. Taub, Pergamon Press, Oxford, vol. V, 1963, p. 3.

184 Determinantul unei matrice A e funcţia polinomială în elementele lui A de care depind existenţa şi unicitatea soluţiilor sistemului de ecuaţii cu matrice a coeficienţilor egală cu A, dar şi numărul de condiţionare al lui A. Determinantul e egal cu produsul valorilor proprii ale lui A.

185 Acest inconvenient posibil a fost semnalat pentru prima dată (cel mai probabil) de J. Edmonds, „Systems of Distinct Representatives and Linear Algebra", în *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, LXXI B, 1967. Vezi şi L. Lovász, „Algorithmic Aspects of Some Notions in Classical Mathematics", în *Mathematics and Computer Science*, îngr. de J.W. de Bakker, M. Hazewinkel, J.K. Lenstra, North-Holland, Amsterdam, 1986.

186 Cf. J. Hartmanis, „Gödel, von Neumann and the P = ?NP Problem", în *The Structural Complexity Column*, 1989. Hartmanis se referă în mod precis la cele trei probleme fundaţionale: incompletitudinea, indecidabilitatea şi complexitatea, explicând astfel cum aceasta din

urmă moştenește problema fundamentală referitoare la ce anume, în matematică, admite sau nu o soluție.

187 Nici calculul unui simplu polinom de gradul al doilea $p(x)$ nu e scutit de primejdii. Dacă scriem formula unei simple parabole de ecuație $y = p(x) = 1+(x-5555,5)^2$ sub forma $p(x) = 30863581,25-11111x+x^2$, calculând $p(5554)$ şi $p(5554,5)$ în aritmetica maşinii cu 6 cifre semnificative, se obțin, respectiv, numerele 0 şi 100. Altfel spus, o perturbare mică asupra lui x se poate reflecta într-o perturbare importantă asupra lui $p(x)$. Exemplul e luat din J.R. Rice, *Numerical Methods, Software, and Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983, p. 60.

188 A.-L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. 1re Partie. Analyse Algébrique*, Debure, Paris, 1821, p. 463. Cursivele mele.

189 Dacă x aparține intervalului $[c, d]$, atunci valoarea absolută a lui $h(x)$ e mai mică sau egală cu ε. Dacă, în acelaşi interval, $t(x)$ e pozitivă, nu putem deduce că la fel e şi $h(x)$, pentru că inegalitatea $h(x)+ e(x)>0$ e compatibilă cu inegalitatea $h(x)<0$. Altfel stau lucrurile dacă x nu aparține $[c, d]$. În acest caz, valoarea absolută a lui $h(x)$ e mai mare decât ε şi, dacă $t(x)$ e pozitivă, atunci şi $h(x)$ e pozitivă. Într-adevăr, dacă ar fi adevărat că $h(x)<0$, am avea $h(x)<-\varepsilon$, deci şi $h(x)+ e(x)<0$, contradicție.

190 S. Weil, *Cahiers*, in *Œuvres complètes*, vol. VI, tom III, cit., p. 90.

191 E.P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, cit.

192 A. Capelli, „Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue", în *Giornale di Matematiche*, XXXV, 1897, p. 210.

193 S. Weil, *Cahiers*, in *Œuvres complètes*, vol. VI, tom II, cit., p. 352.

194 Toma din Aquino, *Summa Theologiae*, I, q. 4, a. 1: „*Oportet enim ante id quod est in potentia, esse aliquid actu, cum ens in potentia non reducatur in actum, nisi per aliquod ens in actu*".

195 R.J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs* (1972), Dover, New York, 1982. Vezi şi S. Couchoud, *Mathématiques Egyptiennes*, Le Léopard d'Or, Paris, 1993.

196 Scrisoare autografă aflată într-o colecție privată (PZ), 1972.

Autorul e cu osebire îndatorat lui Giuseppe Trautteur şi lui Roberto Calasso pentru prețioasele lor sfaturi şi sugestii. Îi mulțumeşte Maddalenei Buri pentru foarte atenta analiză şi redactare finală. Mulțumiri se cuvin, în fine, Mariei Carolina Foi, lui Giancarlo Spalacci şi lui Carmine Di Fiore pentru propunerile şi comentariile lor.

Cuprins

Introducere. .5

1. Abstractizare, existenţă şi realitate. 11
2. Matematica zeilor. ...19
3. Formule matematice şi formule filozofice. ..32
4. Creştere şi micşorare. Număr şi *phýsis* ..38
5. *Katà gnómonos phýsin*. 48
6. *Dýnamis*. Capacitatea de a produce 53
7. Intermezzo. Mecanica spirituală ...62
8. Paradoxurile lui Zenon. Explicarea mişcării ..66
9. Paradoxurile pluralităţii . 77
10. Limită şi nelimitat. Incomensurabilitate şi algoritmi . ..84
11. Realitatea numerelor. Şirurile fundamentale ale lui Cantor .98
12. Realitatea numerelor. Tăieturile lui Dedekind . .107
13. Matematica: descoperire sau invenţie?. .118
14. De la continuu la digital . .122
15. Creşterea numerelor .133
16. Creşterea matricelor .140
17. Criza fundamentelor şi creşterea complexităţii. Realitate şi eficienţă . .155
18. *Verum et factum* .163
19. Recursivitate şi invarianţă .166

Note . 171